§5 Abbildungen

(5.1) DEF: M und N seien Mengen. Eine **Abbildung** (oder **Funktion**) von M nach N ordnet jedem Element aus M genau ein Element aus N zu.

Bezeichnungen: Ist f eine Abbildung von M nach N, so schreibt man dafür $f : M \longrightarrow N$.

Jedem Element $x \in M$ wird genau ein Element $y \in N$ zugeordnet: $x \longmapsto y =: f(x)$

$f(x)$ heißt der **Bildwert von** f **an der Stelle** x oder **Bild von** x **unter** f

Gilt $y = f(x)$, so heißt x **Urbild von** y **unter** f

Eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ ist also durch 3 Daten bestimmt:

M	**Definitionsbereich**
N	**Wertemenge**
$x \longmapsto f(x)$	**Zuordnungsvorschrift**

Beispiele: 1) Speziell bei endlichen Mengen läßt sich eine Abbildung dadurch definieren, daß man für jedes Element aus M explizit den Bildwert aus N festlegt:

$M := \{1, 2, 3\}$, $N := \{a, b\}$. Durch $f : 1 \longmapsto a$, $2 \longmapsto b$, $3 \longmapsto a$ ist eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ definiert.

2) Die Zuordnungsvorschrift einer Abbildung kann durch eine Formel gegeben sein:

$g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0$, $g(z) := z^2$ für alle $z \in \mathbb{Z}$

(5.2) BEM: Ist $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung, so ist

$$G_f := \{\, (x, f(x)) \,|\, x \in M \,\} \subseteq M \times N$$

eine Teilmange von $M \times N$, also eine **Relation** zwischen den Mengen M und N. (G_f heißt der **Graph von** f). Dabei gilt $(x, y) \in G_f$ genau dann, wenn $y = f(x)$ ist, d.h. wenn y Bild von x unter f ist. Dies können wir nun zu einer präziseren Definition einer Abbildung benutzen:

Eine **Abbildung** $f : M \longrightarrow N$ ist eine **Relation** $f \subseteq M \times N$ mit folgenden Eigenschaften:

i) Jedes $x \in M$ besitzt ein Bild unter f in N

ii) Sind $y_1, y_2 \in N$ Bilder von x unter f, so folgt $y_1 = y_2$.

(i) und ii) besagen gerade: Jedes $x \in M$ hat genau ein Bild in N unter f)

Da " y ist Bild von x unter f " formal $(x, y) \in f$ bedeutet, können wir die obigen Eigenschaften folgendermaßen formulieren:

i) $\forall x \in M \,\exists y \in N : (x, y) \in f$ (f ist **linkstotal**)

ii) $\forall x \in M \,\forall y_1 \in N \,\forall y_2 \in N : (x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \implies y_1 = y_2$ (f ist **rechtseindeutig**).

Fazit: Eine Abbildung ist eine linkstotale und rechtseindeutige Relation zwischen zwei Mengen.

Erfüllt die Relation $f \subseteq M \times N$ nur die Bedingung ii), so heißt f auch eine **partielle Abbildung**.