12) Für die Äquivalenzrelation S auf $\mathbb{Z}$ gilt:

$[0] = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x\,S\,0\} \;=\; \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} \;=:\; V_0$

$[1] = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x\,S\,1\} \;=\; \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \;=:\; V_1$

$[2] = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x\,S\,2\} \;=\; \{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \;=:\; V_2$

Es gilt z.B. $[0] = [6] = [-9]$ oder $[1] = [-5] = [16]$, und es ist $\mathbb{Z}/S = \{[0],[1],[2]\} = \{V_0, V_1, V_2\}$. Man sieht: Viele der Äquivalenzklassen fallen zusammen, so daß schließlich die Quotientenmenge $\mathbb{Z}/S = \{[x] \mid x \in \mathbb{Z}\}$ aus genau drei Klassen besteht. Allgemein können wir beweisen:

(4.10) SATZ: M sei eine Menge und R eine Äquivalenzrelation auf M. Dann gilt:

a) $\forall x \in M : x \in [x]_R$

b) $\forall x, y \in M : [x]_R = [y]_R \iff x\,R\,y$

c) $\forall x, y \in M : [x]_R = [y]_R \iff [x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$

d) $\displaystyle\bigcup_{[x]_R \in M/R} [x]_R = M$.

Bew: a) Wegen $\mathbf{R}_1$) gilt $x\,R\,x$, also $x \in [x]$.

b) "$\Longrightarrow$" $x \in [x] = [y] \implies x \in [y] \implies x\,R\,y$ nach Definition von $[y]$.

"$\Longleftarrow$" Sei $z \in [x]$ beliebig. Dann gilt $z\,R\,x$. Aus der Voraussetzung $x\,R\,y$ ergibt sich mit der Transitivität $z\,R\,y$, also $z \in [y]$. Damit ist $[x] \subseteq [y]$ gezeigt. Analog zeigt man $[y] \subseteq [x]$, so daß insgesamt die behauptete Gleichheit folgt.

c) "$\Longrightarrow$" $[x] = [y] \neq \emptyset$ (nach a)) $\implies [x] \cap [y] = [x] \neq \emptyset$.

"$\Longleftarrow$" $\exists\, z \in [x] \cap [y] \implies z\,R\,x \wedge z\,R\,y$. $\mathbf{R}_3$) und $\mathbf{R}_6$) liefern hieraus $x\,R\,y \implies [x] = [y]$

d) $[x] \subseteq M \implies \displaystyle\bigcup_{[x] \in M/R} [x] \subseteq M$.

Umgekehrt: $y \in M$ beliebig $\implies y \in [y] \implies y \in \displaystyle\bigcup_{[x] \in M/R} [x]$, d.h. $M \subseteq \displaystyle\bigcup_{[x] \in M/R} [x]$.

Die Äquivalenzklassen bzgl. einer Äquivalenzrelation R auf einer Menge M bilden ein disjunktes Mengensystem bestehend aus nichtleeren Teilmengen von M, deren Vereinigung die Menge M ergibt.

(4.11) DEF: Es sei M eine Menge. Ein System $\mathcal{Z}$ von Teilmengen von M heißt eine **Zerlegung von M**, wenn gilt:

1) $\forall Z \in \mathcal{Z} : Z \subseteq M$ und $Z \neq \emptyset$

2) $\forall Z, Z' \in \mathcal{Z} : Z \neq Z' \implies Z \cap Z' = \emptyset$

3) $\displaystyle\bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z = M$.

Damit ist die Quotientenmenge eine Zerlegung von M, und man kann sich überlegen, daß es zu jeder Zerlegung von M eine Äquivalenzrelation gibt, deren Quotientenmenge gerade die gegebene Zerlegung ist (s. 5. Übung).