4.c Äquivalenzrelationen

Eine weitere wichtige Klasse von Relationen bilden die sog. Äquivalenzrelationen, die eng mit dem Abstraktionsprozeß in der Mathematik zusammenhängen.

(4.8) DEF: Eine Relation R auf einer Menge M heißt **Äquivalenzrelation auf** M,wenn gilt:

R$_1$) $\forall x \in M : x R x$ (**Reflexivität**)

R$_6$) $\forall x, y \in M : x R y \Longrightarrow y R x$ (**Symmetrie**)

R$_3$) $\forall x, y, z \in M : (x R y \wedge yRz) \Longrightarrow xRz$ (**Transitivität**)

Der Unterschied zu einer Ordnungsrelation liegt nur in einer Bedingung. Während **R$_1$)** und **R$_3$)** in beiden Fällen gelten, ist eine Äquivalenzrelation symmetrisch (**R$_6$**), eine Ordnungsrelation dagegen antisymmetrisch (**R$_2$**) . Trotzdem werden wir wesentliche Unterschiede feststellen. Gilt $x R y$, so sagt man auch, daß x äquivalent ist zu y bzgl. R.

Beispiele für Äquivalenzrelationen:

6) Parallelität von Geraden der Ebene

7) Gleichheitsbeziehung zwischen den Elementen einer Menge

11) $x, y \in \mathbb{Z} : xRy \;:\Longleftrightarrow\; x - y$ ist gerade

12) $x, y \in \mathbb{Z} : xSy \;:\Longleftrightarrow\; x - y$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von 3.

(4.9) DEF: R sei eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M. Für ein Element $x \in M$ heißt die Menge

$$[\,x\,]_R := \{\, y \mid y \in M \wedge y R x \,\} \subseteq M$$

aller Elemente von M, die zu x bzgl. R äquivalent sind, die **Äquivalenzklasse von x bzgl. R.** Die Menge $M/R := \{\, [\,x\,]_R \mid x \in M \,\}$ aller Äquivalenzklassen von Elementen aus M bzgl. R heißt die **Quotientenmenge von M nach R.**

Wenn aus dem zzusammenhang klar ist, um welche Äquivalenzrelation es sich handelt, so schreibt man auch nur $[\,x\,]$ für die Äquivalenzklasse von x. Man mache sich klar:

$$[\,x\,]_R \in \mathcal{P}(M) \quad \text{und} \quad M/R \subseteq \mathcal{P}(M)$$

Beispiele: 6) Für $g \in G$ ist $[\,g\,] = \{\, h \mid h \in G \wedge h \parallel g \,\}$. Damit ist $[\,g\,]$ die Menge aller zu g parallelen Geraden. Das Kennzeichnende für $[\,g\,]$ ist also die gemeinsame **Richtung**, die alle Geraden aus $[\,g\,]$ haben.

7) Für die Äquivalenzrelation R der Gleichheit auf einer Menge M gilt: $[\,x\,]_R := \{\, y \mid y \in M \wedge yRx \,\} = \{\, y \mid y \in M \wedge y = x \,\} = \{x\}$. Also $M/_R = \{\, \{\, x \,\} \mid x \in M \,\}$

11) Für die Relation R auf $\mathbb{Z}$ gilt:

$[\,0\,] = \{\, x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x R 0 \,\} = G$ (Menge der geraden ganzen Zahlen)

$[\,1\,] = \{\, x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x R 1 \,\} = U$ (Menge der ungeraden ganzen Zahlen)

Ferner gilt $[\,2\,] = [\,8\,] = [\,-6\,]$, $[\,-1\,] = [\,3\,] = [\,-17\,]$, $\mathbb{Z}/R = \{\, [\,0\,], [\,1\,]\}$