(4.7) DEF: Sei $(M, \preceq)$ sei eine halbgeordnete Menge.

a) Ein Element $g \in M$ heißt **größtes Element** von $(M, \preceq)$, wenn gilt: $\forall\, x \in M \,:\, x \preceq g$

b) Ein Element $k \in M$ heißt **kleinstes Element** von $(M, \preceq)$, wenn gilt: $\forall\, x \in M \,:\, k \preceq x$

c) Ein Element $m \in M$ heißt **maximales Element** von $(M, \preceq)$, wenn gilt:
$\forall\, x \in M \,:\, m \preceq x \implies x = m$

d) Ein Element $n \in M$ heißt **minimales Element** von $(M, \preceq)$, wenn gilt:
$\forall\, x \in M \,:\, x \preceq n \implies x = n$

In den obigen Beispielen gilt:

10) U_1 ist kleinstes, U_7 ist größtes Element

9) 1 ist kleinstes, 4 ist größtes Element

8) es gibt weder ein kleinstes noch ein größtes Element
8,12,13,25 sind alle maximalen Elemente und 2,3,5,13 sind alle minimalen Elemente.

Weitere Beispiele:

- In $(\mathbb{N}, \leq)$ ist 1 kleinstes Element, es gibt kein größtes. $\forall\, n \in \mathbb{N} \,:\, 1 \leq n$
  Annahme: es gibt ein größtes Element $g \in \mathbb{N}$. Dann folgt $\forall\, n \in \mathbb{N} \,:\, n \leq g$.
  $g \in \mathbb{N} \implies g + 1 \in \mathbb{N} \implies g + 1 \leq g \implies 1 \leq 0$ Widerspruch!
- In $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ist $\emptyset$ kleinstes und M größtes Element.
- In $(\mathbb{Z}, \leq)$ gibt es weder ein kleinstes noch ein größtes Element, auch keine minimalen oder maximalen Elemente.

Beobachtungen:

- In einer partiell geordneten Menge gibt es höchstens ein kleinstes (bzw. größtes) Element
- Es kann mehrere minimale oder maximale Elemente geben
- Gibt es ein kleinstes (größtes) Element, so gibt es kein weiteres minimales (maximales) Element.