DEF: Menge (Georg Cantor, 1845–1918)

Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung von Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einer Gesamtheit. Die Objekte heißen **Elemente** der Menge.

Es werden folgende Voraussetzungen gemacht:

- Ist M eine Menge und x ein Objekt, so gehört x entweder zu M oder nicht
- Die Elemente einer Menge sind alle voneinander verschieden
- Eine Menge selbst ist wieder als ein Objekt unserer Anschauung oder unseres Denkens anzusehen
- Zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

Bezeichnung Ist M eine Menge und x ein Objekt, so bedeute $\underline{x \in M}$, daß x ein Element von M ist, und $x \notin M$ bedeute, daß x nicht Element von M ist. Zur Bezeichnung einer Menge werden geschweifte Klammern benutzt, die um die Elemente gesetzt werden.

Definition einer Menge

Wir können eine Menge dadurch definieren, daß wir ihre Elemente aufzählen (meistens bei endlichen Mengen) oder eine Eigenschaft angeben, die genau von ihren Elementen erfüllt sein soll.

- **aufzählend** (auch **extensional**) $M := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ist die Menge der ganzen Zahlen von 1 bis 5
- **beschreibend** (auch **intensional**) $N := \{\, x \mid x \text{ erfüllt die Eigenschaft } E \,\}$
  Häufig wird ein Bereich B angegeben, aus dem x stammen soll
  $N := \{\, x \mid x \in B\,,\ x \text{ erfüllt die Eigenschaft } E \,\}$
  Beispiel: $G := \{\, x \mid x \in \mathbb{Z}\,,\ x \text{ ist eine gerade Zahl} \,\}$ ist die Menge aller geraden ganzen Zahlen.

Standard–Mengen

$\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen ≥ 1

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

$\mathbb{N}_0$ Menge der natürlichen Zahlen ≥ 0

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

$\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{Q} = \{\, \mathrm{r} \mid \mathrm{r} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}, \, \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{Z}, \mathrm{b} \neq 0\}$

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen

$\emptyset$ eine Menge, die kein Element enthält (**leere Menge**)

(3.1) DEF: Zwei Mengen M und N heißen **gleich** (in Zeichen $M = N$), wenn jedes Element aus M auch Element von N ist und umgekehrt.

(3.2) DEF: Eine Menge M heißt **Teilmenge** einer Menge N (in Zeichen: $M \subseteq N$), wenn jedes Element von M auch Element von N ist.

M heißt **echte Teilmenge** von N (in Zeichen: $M \subset N$), wenn $M \subseteq N$ und $M \neq N$ gelten.

$M \not\subseteq N$ bedeutet, daß M keine Teilmenge von N ist.

(3.3) BEM: **a)** Für jede beliebige Menge M gilt: $\emptyset \subseteq M$

b) Für je zwei Mengen M und N gilt: $(M = N) \iff M \subseteq N$ **und** $N \subseteq M$.