Nelius/Nöcker

7. Übungsblatt

MATHEMATIK FÜR INFORMATIKER I (WS 2000/01)

Abgabe: Montag, 11.12.2000 bis **13.00 Uhr !!!**

Internet–Adresse der Vorlesung:

http://math–www.uni–paderborn.de/~chris/index9.html

25. Aufgabe: Wir beweisen im folgenden durch vollständige Induktion, daß alle Autos dieselbe Farbe haben: Ein Auto hat dieselbe Farbe wie es selbst (Induktionsanfang). Jetzt nehmen wir an, daß je n Autos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dieselbe Farbe haben (Induktionsvoraussetzung). Von $n+1$ Autos haben nach Induktionsvoraussetzung die ersten n Autos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und die letzten n Autos $A_2, A_3, \ldots, A_{n+1}$ dieselbe Farbe. Dann hat das $(n+1)$–te Auto dieselbe Farbe wie die Autos $A_2, \ldots, A_n$, die wiederum dieselbe Farbe wie die ersten n Autos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ haben müssen, da ein Auto seine Farbe nicht wechselt, so daß schließlich alle $n+1$ Autos $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ dieselbe Farbe haben. (qed, d.h. "quod erat demonstrandum" oder "was zu beweisen war")

Ist irgendetwas falsch an dieser Argumentation? (2)

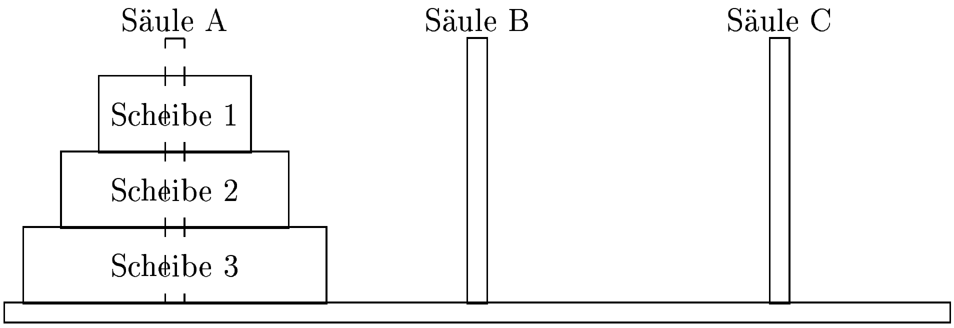
26. Aufgabe: Finde eine Rekursionsgleichung für die Anzahl a_n der n–stelligen Binärzahlen (das sind Elemente aus dem kartesischen Produkt $\{0,1\}^n$, eine Zahl darf also auch mit 0 beginnen!), in denen keine aufeinanderfolgenden 0'en vorkommen. Schreibe die ersten 5 Zahlen $a_1, \ldots, a_5$ auf. Kommt dir dabei irgendetwas bekannt vor? (Hinweis: Betrachte beim Induktionsschluß einmal die Binärzahlen, die mit 1 enden, und die, die mit 0 enden). (5)

27. Aufgabe: Die Zahlen b_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ seien rekursiv definiert durch $b_0 := 1$, $b_1 := 2$, $b_n := 2b_{n-1} - b_{n-2}$ $(n \geq 2)$. Schreibe die ersten 7 Zahlen auf. Finde eine Formel für b_n und beweise diese durch vollständige Induktion. (3)

Auf der nächsten Seite steht auch noch eine schöne Aufgabe!!!

28. Aufgabe: (Keine Angst, der Aufgabentext ist länger als die Lösung!!!)

Unter Informatikern ist ein Spiel sehr beliebt, das ein Wanderer einst aus einem fernen Land mitbrachte. Das Spielbrett besteht aus drei Holzstäben. Als Spielsteine dienen 3 Holzscheiben unterschiedlicher Größe, die in der Mitte ein Loch haben, so daß sie auf den Holzstäben aufgeschichtet werden können. Zu Anfang des Spiels hat man die im Bild dargestellte Situation: alle drei Holzscheiben liegen auf einem Stapel, und zwar so, daß jede Holzscheibe auf einer größeren Scheibe liegt, und die größte unten.



Ziel des Spiels ist es, die drei Scheiben *in derselben Abfolge* (also Schreibe 3 unten, Scheibe 1 oben) auf die Säule C zu verlagern. Dabei gelten folgende Spielregeln:

- Bei jedem Zug darf immer nur eine einzige Scheibe bewegt werden.
- Es darf nie eine kleinere Scheibe unter einer größeren liegen.
- Zum Ablegen der Scheiben dürfen nur die Säulen A, B und C benutzt werden.

Eine alte Handschrift sagt über das Spiel: *Spiele es, aber spiele es gut. Wenn du erkennst, wo das Spiel der zwei Scheiben endet, dann bist du auch Meister des Spiels mit drei Scheiben.*

1. Spiele das Spiel zuerst nur mit den Scheiben 1 und 2. Zeige, daß dann 3 Züge ausreichen, um den Stapel mit zwei Scheiben von Säule A auf Säule C zu schieben.
2. Beschreibe einen Spielverlauf mit 3 Scheiben, der in 7 Zügen den Stapel von Säule A auf Säule C verlagert.
3. Erläutere, wo das Spiel mit 2 Scheiben im Spiel mit 3 Scheiben auftaucht.
4. Finde eine Rekursionsgleichung für die Anzahl s_n der Züge, die man höchstens braucht, um $n \in \mathbb{N}$ Scheiben von Säule A nach Säule C zu verlagern. Beweise deine Vermutung durch vollständige Induktion.
5. Suche eine explizite Formel für s_n und beweise sie.

(6)