Nelius/Nöcker

14. Übungsblatt

MATHEMATIK FÜR INFORMATIKER I (WS 2000/01)

Abgabe: Montag, 12.2.2001 bis **13.00 Uhr !!!**

Internet–Adresse der Vorlesung:

http://math–www.uni–paderborn.de/~chris/index9.html

Benutze bei diesen Aufgaben keinen Taschenrechner!

51. Aufgabe: Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Beweise, daß die Matrix A invertierbar ist, und berechne nach dem Verfahren (10.28) die inverse Matrix von A.

b) Bestimme alle Lösungen des LGS's $Ax = b$.

c) Kann es ein $c \in \mathbb{R}^3$ geben, so daß das LGS $Ax = c$ nicht lösbar ist? Begründe die Antwort!

d) Stelle die Matrix A als ein Produkt von Elementarmatrizen dar. Mache die Probe! (4)

52. Aufgabe: Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,5}(\mathbb{R})$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Bestimme die Lösungsmengen der LGS'e $Ax = b$ und $Ax = b'$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus. (4)

53. Aufgabe: Löse das LGS $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Z}_5$. Hierbei stehen die Zahlen $0, 1, 2, 3, 4$ für die Restklassen modulo 5, und bei der Addition und Multiplikation dieser Zahlen ist immer modulo 5 zu rechnen! Gib die Lösungen explizit an. Wieviele Lösungen gibt es? (3)

Zum Ausklang der Übungen noch eine schöne Aufgabe, deren Text wieder einmal viel länger ist als die Lösung:

54. Aufgabe: Moderne Kommunikationsgeräte (wie z.B. Handies, Satelliten, CD-Player) arbeiten digital, d.h., alle Daten werden als Folge von 0 und 1 (sog. Bitströmen) dargestellt. Ein Problem ist dabei das Erkennen von Übertragungsfehlern, d.h. statt des gesendeten Bits a kommt das Bit $1-a$ an. Solche Probleme werden in der Codierungstheorie behandelt. Dazu nutzt man lineare Gleichungssysteme und Matrizen.

1. Die einfachste Art, einen Fehler zu erkennen, ist, ein Bit a dreimal zu schicken, also aaa statt a. Drei Bits $x_1x_2x_3$ werden dann vom Empfänger als Einheit gelesen. Das Wort ist richtig empfangen worden, wenn gilt
$$x_2 = x_3 \text{ und } x_1 = x_3. \tag{1}$$
Schreiben Sie diese Gleichungen in eine Matrixschreibweise vom Typ
$$H \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
um, wobei alle Einträge *modulo* 2 gerechnet werden, da sie Bits darstellen! Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems (1) *in* $\mathbb{Z}_2$. Die Elemente dieser Lösungsmenge sind 3-Bit-Worte $x_1x_2x_3$ und werden *Worte des Codes* genannt.

2. Kommt nun ein Wort an, das kein Wort des Codes ist, so wird es korrigiert. Das geschieht wie folgt: zwei Bits sind gleich, ein Bit ist davon verschieden. Das *ursprüngliche Bit* ist dann gleich dem Wert, der zweimal vorkommt. Bsp: empfangen 101, dann ist das ursprünglich gesendete Bit 1. Wie lautet also der ursprünglich gesendete Bitstrom, wenn man folgende 3-Bit-Folge empfängt?
$$101 \quad 111 \quad 001 \quad 010 \quad 110 \quad 001 \quad 100$$

3. Das Problem ist: statt ursprünglich ein Bit werden nun 3 Bit gesendet, d.h., die Nachricht wird um den Faktor 3 aufgebläht. Mit sogenannten *Hamming-Codes* kann man einen kleineren Faktor erreichen. Man sendet immer 4 Bits x_1, x_2, x_3, x_4 und fügt drei Kontrollbits y_1, y_2, y_3 hinzu. Ein Codewort ist dann ein 7-Bit-Wort $x_1x_2x_3x_4y_1y_2y_3$, das folgendes Gleichungssystem erfüllt:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$
In der i-ten Spalte der Matrix steht also gerade die Zahl i in binärer Schreibweise (${}^t(0,0,1)$ steht also für binär (001), d.h. 1)! Codieren Sie alle 4-Bit-Worte $x_1x_2x_3x_4$ mit diesem Code, indem Sie y_1, y_2, y_3 bestimmen, so dass ${}^t(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3)$ eine Lösung von (2) ist.

4. Zeigen Sie: Addiert man zwei Codeworte $a, b \in \mathbb{Z}_2^7$, so ist das Wort $c = a + b$ auch ein Codewort, d.h. eine Lösung von (2).

5. Man kann die fehlerhafte Übertragung des i-ten Bits ($1 \leq i \leq 7$) beim Codewort $a = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3)$ wie folgt in Formeln darstellen: man addiert den Einheitsvektor $e_i \in \mathbb{Z}_2^7$ (in Zeile i steht eine 1, sonst 0) zu a. Zeigen Sie: Multipliziert man die Matrix aus (2) von rechts mit $a + e_i$, so ist die Lösung gerade der Vektor, der transponiert die Binärdarstellung von i ist.

6. Man erhält also die ursprünglichen Bits zurück, indem man jeden 7-stelligen empfangenen Bit-Vektor von rechts an die Matrix aus (2) multipliziert. Ist das Ergebnis ${}^t(0, 0, 0)$, so ist das empfangene Wort korrekt, und man nimmt die ersten vier Bit als ursprüngliche Nachricht. Andernfalls erhält man als Ergebnis den Index des falsch übertragenen Bits. Dieses Bit korrigiert man: aus 0 mache 1 bzw. aus 1 wird 0. Dann nimmt man die ersten vier Bit als ursprüngliche Nachricht. Wie lautet also die ursprünglich gesendete Folge von 4 Bits, wenn man folgende 7-Bit-Folge empfängt?

$${}^t(0, 1, 1, 0, 0, 1, 1) \qquad {}^t(0, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$$

7. Um welchen Faktor wird die ursprüngliche Nachricht bei diesem Hamming-Code aufgebläht?

(5)