13. Übungsblatt

MATHEMATIK FÜR INFORMATIKER I (WS 2000/01)

Abgabe: Montag, 5.2.2001 bis **13.00 Uhr !!!**

Internet–Adresse der Vorlesung:

http://math–www.uni–paderborn.de/~chris/index9.html

47. Aufgabe: Sei $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Stelle für die Relation $\leq$ auf M die Adjazenzmatrix auf.

b) Für welche Relation R auf M hat die Adjazenzmatrix das nebenstehende Aussehen

$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)

48. Aufgabe: Sei R eine Relation auf der Menge $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ und $A_R = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ die zugehörige Adjazenzmatrix. Beweise:

a) R reflexiv $\iff$ $a_{ii} = 1 \;\; \forall\, i \in M$

b) R symmetrisch $\iff$ A_R ist eine symmetrische Matrix

c) R transitiv $\iff$ $a_{ik} \cdot a_{kl} \leq a_{il} \;\; \forall\, i, k, l \in M$

d) $A_{R^{-1}} = {}^tA_R$ (Hierbei bezeichnet R^{-1} die zu R inverse Relation). (5)

49. Aufgabe: Seien $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Berechne die Matrizenprodukte $A \cdot B$, $A \cdot A$, $E_{12} \cdot A$, $A \cdot E_{32}$ (Hierbei ist E_{ik} eine Basismatrix)

b) Untersuche, ob A oder B invertierbar sind (Hinweis: Versuche **nicht**, ein Inverses zu berechnen, sondern arbeite mit den Ergebnissen aus a)!).

c) Berechne A^n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (Hinweis: hier sollte man an einen Induktionsbeweis denken!) (5)

50. Aufgabe: Sei $\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Beweise:

a) $\mathcal{C}$ ist abgeschlossen bzgl. der Matrizenaddition und –multiplikation, und die zweireihige Nullmatrix (O) und die zweireihige Einheitsmatrix (E) gehören zu $\mathcal{C}$.

b) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$ ist invertierbar, und das Inverse von A ist ein Element von $\mathcal{C}$. (Zusatzfrage (ohne Wertung): Welche Matrizen aus $\mathcal{C}$ sind überhaupt invertierbar?)

c) Es gibt eine Matrix $I \in \mathcal{C}$ mit der Eigenschaft $I^2 + E = O$. (4)