Probeklausur

MATHEMATIK FÜR INFORMATIKER I (WS 2000/01)

Versuchen Sie, diese Aufgaben unter Klausurbedingungen, d.h. insbesondere **ohne** Hilfsmittel, zu bearbeiten. Es werden auch noch Musterlösungen ins Netz gestellt (s. Aktuelle Informationen), die Sie sich aber erst dann ansehen sollten, nachdem Sie die Aufgaben selber bearbeitet haben. Sonst bringt das Ganze nichts.

Diese Probeklausur kann nur einen Anhaltspunkt über Art und Schwierigkeitsgrad der Aufgaben der kommenden Klausur geben, Spekulationen darüberhinaus sollten nicht angestellt werden!

1. Aufgabe: Kreuze bei den folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch sind. Eine Begründung ist nicht erforderlich! (Für eine falsche Antwort gibt es keine Minuspunkte!)

	Aussage	richtig	falsch
1	Für jede reelle Zahl x gilt $\lfloor x \rfloor \neq \lceil x \rceil$		
2	Esgibt eine injektive Abbildung $\{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow \{2,4,6,8,10\}$		
3	Die Aussage $(P \vee Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ ist allgemeinrichtig		
4	Jedes homogene LGS, das weniger Gleichungen als Unbekannte hat, besitzt eine Lösung, die von der Nullspalte verschieden ist		
5	Die Menge $\{1,2,3,5,6\}$ besitzt genau 64 Teilmengen		
6	Eine Äquivalenzrelation ist insbesondere antisymmetrisch		
7	Die Lösungsmenge eines inhomogenen LGS's für n Unbekannte über einem Körper K ist ein Unterraum von K^n		
8	Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \setminus \{100\}$ sind gleichmächtig		
9	$\mathcal{P}(M)$ ist eine Teilmenge von M		
10	Es ist $\varphi(101) = 100$		
11	Die Restklasse von 9 modulo 24 ist invertierbar		
12	Eine (6×7)–Matrix kann den Rang 7 haben		
13	Der Rang einer Matrix A ist gleich der Anzahl der Einheitsvektoren, die unter den Spalten der Treppenmatrix $T(A)$ vorkommen		

Bei den folgenden Aufgaben sind jeweils eine ausführliche Begründung und/oder die Berechnung anzugegeben!

2. Aufgabe: Finde eine Formel für die Summe

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

und beweise die gefundene Formel durch vollständige Induktion.

3. Aufgabe: Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $f(v) := A \cdot v \quad (\forall\, v \in \mathbb{R}^2)$. Beweise, daß f bijektiv ist, und bestimme die Umkehrabbildung f^{-1}.

4. Aufgabe: Es seien M, N, P beliebige nichtleere Mengen und $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ Abbildungen.

a) Beweise: Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

b) Zeige durch ein konkretes Gegenbeispiel, daß in a) die Abbildung g nicht notwendig injektiv sein muß .

5. Aufgabe: 10 Studis treffen sich zur Klausur.

a) Auf wieviele Weisen können sie sich an die zehn nummerierten Einzelplätze setzen?

b) Jeder Studi bekommt entweder das Aufgabenblatt A oder das Aufgabenblatt B. Auf wieviele Arten kann diese Verteilung erfolgen?

c) Auf jedem Aufgabenblatt sind 8 Aufgaben zu finden. Davon muss ein Studi genau 5 bearbeiten. Auf wieviele Arten kann er diese Auswahl vornehmen?

d) Die Korrektoren verteilen insgesamt 20 Punkte auf die 5 bearbeiteten Aufgaben eines Studis. Jede Aufgabe kann dabei höchstens 20 Punkte bekommen. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Punkte zu verteilen?

6. Aufgabe: Sei $a \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $a = a_k a_{k-1} \dots a_0$ deren Dezimaldarstellung. Das heißt

$$a = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i,$$

und $0 \leq a_i < 10$. Beachte, daß $10 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 9)$ ist. Beweise die Teilbarkeitsregel durch 9, die besagt, daß a genau dann durch 9 teilbar ist, wenn die Quersumme $Q(a) = \sum_{i=0}^{k} a_i$ durch 9 teilbar ist.

7. Aufgabe: Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,5}(\mathbb{R})$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

a) Zeige durch eine geeignete Rangbestimmung, daß das LGS $A \cdot x = b$ lösbar ist.

b) Bestimme die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen LGS's $A \cdot x = o_4$.

c) Bestimme die Lösungsmenge von $A \cdot x = b$. Mache die Probe!

8. Aufgabe: Sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Beweise die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) A ist invertierbar

b) Das LGS $A \cdot x = b$ besitzt für jedes $b \in K^n$ genau eine Lösung.