Übungsblatt 5

—— Aufgabe 19 ——

(a) Die Abbildung $f : \{a,b,c,d,e\} \to \{1,2,3,4,5,6,7\}$ ist definiert durch

$a \mapsto 2 \qquad b \mapsto 5 \qquad c \mapsto 7$

$d \mapsto 3 \qquad e \mapsto 5.$

Gesucht ist zu $U := \{b,c,d,e\}$ die Bildmenge $f(U)$:

$$f(U) = \big\{ f(x) \big|\ x \in U \big\} = \{ f(b), f(c), f(d), f(e)\} = \{3,5,7\},$$

zu $V := \{3,4,5\}$ die Urbildmenge $f^{-1}(V)$:

$$f^{-1}(V) = \big\{x \big|\ x \in M, f(x) \in V\big\} = \big\{x \big|\ x \in M, f(x) \in \{3,4,5\}\big\} = \{b,d,e\}$$

und zu $V' := \{1,2\}$ die Urbildmenge $f^{-1}(V')$:

$$f^{-1}(V') = \big\{x \big|\ x \in M, f(x) \in V'\big\} = \big\{x \big|\ x \in M, f(x) \in \{1,2\}\big\} = \{a\}.$$

(b) Die Abbildung $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ist definiert durch $g(z) = z^2$ für alle $z \in \mathbb{Z}$. Weiter sind $U := \{-2,1,0,1,2,3\}$ und $V := \{-1,3,4,5,9\}$.

$$g(U) = \{g(-2), g(1), g(0), g(1), g(2), g(3)\} = \{0,1,4,9\}$$

$$g^{-1}(U) = \big\{x \big|\ x \in \mathbb{Z}, g(x) \in V\big\} = \{-3,-2,2,3\}$$

—— Aufgabe 20 ——

Gegeben sind die zwei Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,s) & \longmapsto & r - s \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 - x + 1 \end{array}$$

(i) Zu berechnen:

$$(g \circ f)((5,2)) = g(f((5,2)) = g(5-2) = g(3) = 25$$

$$(g \circ f)((2,5)) = g(f((2,5)) = g(2-5) = g(-3) = -24$$

(ii) Behauptung: $(f \circ g)(2)$ kann nicht berechnet werden.

Beweis. Die Hintereinanderausführung $(f \circ g)$ ist nicht definiert, da die Wertemenge $\mathbb{R}$ von g nicht mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ von f übereinstimmt. ☐

—— Aufgabe 21 ——

(a) Behauptung: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+5$ ist injektiv aber nicht surjektiv.

Beweis. Injektivität: Sind $n, n' \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = f(n')$, so gilt $n+5 = n'+5$ und damit $n = n'$.
Surjektivität: $4 \in \mathbb{N}$ besitzt kein Urbild unter f. Annahme: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = 4 = n+5$. Dann ist $n = -1 \in \mathbb{N}$. Dies ist aber ein Widerspruch, da $-1 \notin \mathbb{N}$. ☐

(b) Behauptung: $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x - y$ ist surjektiv aber nicht injektiv.

Beweis. Injektivität: Es sind $(2,1), (3,2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $(2,1) \neq (3,2)$. Aber $g(2,1) = 2-1 = 1 = 3-2 = g(3,2)$. Damit ist g nicht injektiv.
Surjektivität: Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig, dann ist $(x,0) \in \mathbb{R}$ und $g(x,0) = x - 0 = x$. Wir können also zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein Urbild finden. Damit ist g surjektiv. ☐