Übungsblatt 4

—— Aufgabe 14 ——

Wir betrachten die Relation $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die für $(m,n),(m',n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert ist durch:
(1) $\quad (m,n)R(m',n') :\Longleftrightarrow m \leq m' \wedge n \leq n'$.

(a) Zu zeigen: R ist eine partielle Ordnung auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Beweis. *Reflexivität:* Sei also $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ beliebig gewählt. Dann gilt $m \leq m \wedge n \leq n$, da $\leq$ reflexiv ist. Also ist wegen (1) $(m,n)R(m,n)$ und damit ist R reflexiv.
Antisymmetrie: Seien $(m,n),\ (m',n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $(m,n)R(m',n')$ und $(m',n')R(m,n)$. Das heißt doch nach (1), daß

$m \leq m' \wedge n \leq n'$ und $m' \leq m \wedge n' \leq n$.

Da aber $\leq$ antisymmetrisch ist, folgen $m = m'$ und $n = n'$. Zusammengefaßt heißt das: $(m,n)R(m',n') \wedge (m',n')R(m,n) \Rightarrow m = m' \wedge n = n' \Rightarrow (m,n) = (m',n')$. Das ist aber genau die Definition von antisymmetrisch.
Transitivität: Seien $(m,n),\ (m',n'),(m'',n'') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ beliebig mit $(m,n)R(m',n')$ und $(m',n')R(m'',n'')$. Dann gelten nach (1)

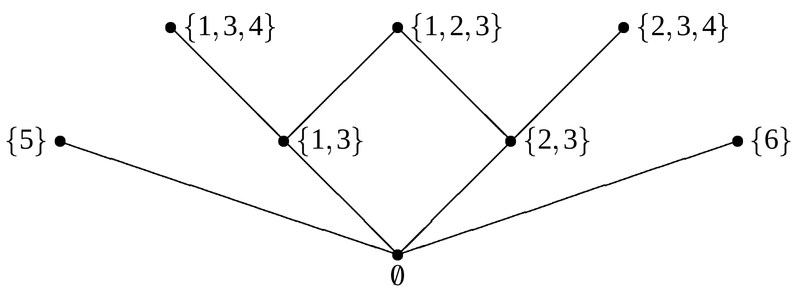
$m \leq m' \wedge n \leq n'$ und $m' \leq m'' \wedge n' \leq n''$.

Da $\leq$ transitiv ist, folgen $m \leq m''$ und $n \leq n''$. Also $(m,n)R(n'',m'')$. Wir haben also gezeigt: $(m,n)R(m',n') \wedge (m',n')R(m'',n''') \Rightarrow (m,n)R(n'',m'')$. Damit ist R transitiv.
Aus den Eigenschaften *reflexiv, antisymmetrisch* und *transitiv* folgt, daß R eine partielle Ordnungsrelation ist. $\square$

Behauptung: R ist nicht linear.

Beweis. Linearität heißt $\forall (m,n),(m',n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} :\ (m,n)R(m',n') \vee (m',n')R(m,n)$. Es reicht also ein Gegenbeispiel anzugeben:
Es gilt $(1,2) \not R (2,1)$ und $(2,1) \not R (1,2)$. Also ist R nicht linear. $\square$

(b) Zu $M := \{\emptyset, \{5\}, \{6\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}\{2,3,4\}\}$ ist das Hasse-Diagramm bezüglich der Relation $\subseteq$ aufzustellen:



Wie man sieht, ist $\emptyset$ das kleinste Element der Menge, denn $\forall x \in M :\ \emptyset \subseteq x$. Damit ist $\emptyset$ auch (einziges) minimales Element. Es gibt kein größtes Element, denn $\forall x \in M\ \exists y \in M :\ y \not\subseteq x$.
Die maximalen Elemente in $(M,\subseteq)$ sind: $\{5\},\ \{6\},\ \{1,2,3\},\ \{1,3,4\},\ \{2,3,4\}$.
$(M,\subseteq)$ ist nicht linear geordnet, denn z.B. $\{1,2\} \not\subseteq \{2,3\}$ und $\{2,3\} \not\subseteq \{1,2\}$.