Chr.Nelius: Mathematik für Informatiker I (WS 2000/01)

Musterlösung für die 1. Aufgabe

In dieser Aufgabe werden weitere Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen aufgestellt. Beim Beweis dürfen **nur** solche Regeln benutzt werden, die in der Vorlesung als Grundregeln aufgestellt oder darauf basierend bewiesen wurden. Andere Regeln, die (vielleicht noch aus der Schulzeit) bekannt sind, dürfen **nicht** benutzt werden.

1. Aufgabe: a) Beh.: $\underline{0 < x < y \implies x^{-1} > y^{-1} > 0}$

$0 < x < y$ bedeutet $0 < x$ und $x < y$. Da $<$ transitiv ist, folgt insbesondere auch $0 < y$.

Als ersten Schritt beweisen wir: $\underline{x > 0 \implies x^{-1} > 0}$. Dazu gehen wir indirekt vor:

Annahme: $(\star)$ $x^{-1} \leq 0$.

Da $x > 0$ ist, können wir wegen O_M) die Ungleichung $(\star)$ mit x multiplizieren.

$$x^{-1} \leq 0 \mid \cdot x \implies 1 = x^{-1}x \leq 0 \cdot x = 0 \implies 1 \leq 0$$

Dies ist aber ein **Widerspruch**, da $1 > 0$ gilt. Folglich ist die Annahme falsch und unsere erste Behauptung bewiesen.

Wegen $x^{-1} > 0$ folgt mit (1.8a) ii):

$$x < y \mid \cdot x^{-1} \implies x \cdot x^{-1} < y \cdot x^{-1} \implies 1 < y \cdot x^{-1}$$

Nach dem ersten Schritt gilt auch $y^{-1} > 0$, so daß wir wieder mit (1.8a) ii) schließen können.

$$1 < yx^{-1} \mid \cdot y^{-1} \implies y^{-1} = y^{-1} \cdot 1 < y^{-1}(yx^{-1}) = (y^{-1}y)x^{-1} = 1 \cdot x^{-1} = x^{-1}$$

Also gilt $y^{-1} < x^{-1}$, und das war zu zeigen.

Bemerkung: Die Voraussetzung $0 < x < y$ ist erforderlich: $-3 < -2$ aber $-1/3 > -1/2$

Fazit: Geht man in einer Ungleichung zwischen positiven reellen Zahlen zu den inversen Elementen über, so dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

b) Beh.: $\underline{x < y \ \wedge \ w < z \implies x + w < y + z}$.

Die folgenden Überlegungen basieren auf (1.8a), i) und iii):

$$\left.\begin{array}{lll} x < y \mid + w & \implies & x + w < y + w \\ w < z \mid + y & \implies & y + w < y + z \end{array}\right\} \implies x + w < y + z$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Fazit: Strikte Ungleichungen dürfen addiert werden.

c) Beh.: $\underline{x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ x^2 \leq y^2 \quad \Longrightarrow \quad x \leq y}$

1. Fall: $x = 0$ oder $y = 0$. Hier folgt die Behauptung unmittelbar.

Die Voraussetzung im 1. Fall ist von der Form $A \vee B$. Die Negation hiervon ist dann $\neg A \wedge \neg B$ (Regel von de Morgan). Also:

2. Fall: $x > 0$ und $y > 0$.

Wir führen einen indirekten Beweis. Die Negation der Behauptung $x \leq y$ ist dann $x > y$. Wir benutzen wieder (1.8).

Annahme: $x > y$.

$$\left.\begin{array}{lcl} x > y \mid \cdot x & \Longrightarrow & x^2 = x \cdot x > y \cdot x \\ x > y \mid \cdot y & \Longrightarrow & y \cdot x > y \cdot y = y^2 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad x^2 > y^2$$

Damit erhalten wie einen **Widerspruch** zu unserer Voraussetzung $x^2 \leq y^2$.

Bemerkung: Die Voraussetzung $x \geq 0\ ,\ y \geq 0$ ist erforderlich:
für $x = -3$ und $y = -4$ gilt zwar $x^2 = (-3)^2 = 9 \leq 16 = (-4)^2 = y^2$ aber $x = -3 > -4 = y$.

Fazit: Aus einer Ungleichung zwischen nichtnegativen Zahlen darf auf beiden Seiten die Wurzel gezogen werden (dies entspricht dem Übergang von x^2 nach x):

$$x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ x \leq y \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$$

d) Beh.: $\underline{0 < x < y \quad \Longrightarrow \quad x^2 < y^2}$

Wir führen wieder einen indirekten Beweis:

Annahme: $x^2 \geq y^2$ (Dies ist die Negation von $x^2 < y^2$)

Nach dem Aufgabenteil c) (wir dürfen dieses Ergebnis jetzt benutzen, da wir es gerade bewiesen haben!) folgt $x \geq y$ im **Widerspruch** zu unserer Voraussetzung $x < y$.

Bemerkung: Die Voraussetzung $0 < x < y$ ist erforderlich: Es gilt zwar $-3 < -2$ aber $(-3)^2 = 9 > 4 = (-2)^2$

Fazit: Eine Ungleichung zwischen positiven reellen Zahlen darf quadriert werden.