

§ 2. Endliche Mengen

Der Vorgang des Zählens der Elemente von endlichen Mengen ist eng mit bijektiven Abbildungen verknüpft.

(2.1) DEF: a) Eine nichtleere Menge M heißt **endlich**, wenn es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $f : M \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ gibt. Die Zahl n wird dann die **Anzahl der Elemente** von M genannt. Man schreibt dafür: $n =: |M|$.

b) Die leere Menge $\emptyset$ ist endlich, und es ist $|\emptyset| = 0$.

c) Ist eine Menge M nicht endlich, so heißt sie **unendlich**.

(2.2) SATZ: U sei eine Teilmenge einer endlichen Menge M . Dann gilt:

a) U ist endlich und hat höchstens so viele Elemente wie M (d.h. $|U| \leq |M|$)

b) Hat U genauso viele Elemente wie M (d.h. $|U| = |M|$), so folgt $U = M$.

Wir betrachten im folgenden nur **nichtleere** endliche Mengen.

(2.3) SATZ: M und N seien endliche Mengen, und $f : M \longrightarrow N$ sei eine Abbildung. Dann gilt:

a) Ist $f : M \longrightarrow N$ injektiv, so folgt $|M| \leq |N|$

b) Ist $f : M \longrightarrow N$ surjektiv, so folgt $|M| \geq |N|$

c) Ist $f : M \longrightarrow N$ bijektiv, so folgt $|M| = |N|$.

(2.4) SATZ: M und N seien endliche Mengen mit $|M| = |N|$, und $f : M \longrightarrow N$ sei eine Abbildung. Dann gilt:

a) Ist $f : M \longrightarrow N$ injektiv, so folgt, daß f bijektiv ist

b) Ist $f : M \longrightarrow N$ surjektiv, so folgt, daß f bijektiv ist.

(2.5) SATZ: M und N seien endliche Mengen. Dann ist die Anzahl aller Abbildungen von M nach N gleich

$$|N|^{|M|}.$$

(2.6) SATZ: M und N seien endliche Mengen mit $|M| = |N|$. Dann ist die Anzahl aller bijektiven Abbildungen von M nach N gleich

$$|M|! \quad (|M| \text{--Fakultät}).$$

BEM: Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist $n!$ (lies: **n –Fakultät**) definiert als das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n , d.h.

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$