

Kap.I: Grundlegende Begriffe

§ 1. Abbildungen

Wir beginnen mit der Klärung des Abbildungsbegriffes.

(1.1) DEF: M und N seien nichtleere Mengen. Eine **Abbildung** f von M nach N (in Zeichen: $f : M \longrightarrow N$) ordnet jedem Element aus M genau ein Element aus N zu.

Bezeichnungen: Ist $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung, so heißt M der **Definitionsbereich von f** und N der **Wertebereich von f** .

Wird dem Element $x \in M$ durch f das Element y aus N zugeordnet, so nennt man y den **Bildwert von x unter f** und schreibt $y = f(x)$ oder $x \longmapsto y$.

Ist y ein Element aus N , so heißt jedes Element $x \in M$ mit $y = f(x)$ ein **Urbild von y unter f** .

Achtung: Eindeutige Zuordnung bedeutet, dass einem Element aus M nicht zwei oder mehr Elemente aus N zugeordnet werden dürfen. Dagegen kann mehreren (oder sogar allen) Elementen aus M dasselbe Element aus N zugeordnet werden.

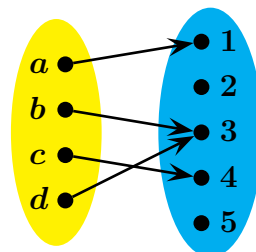


(1.2) BEISPIELE: a) Die Zuordnungsvorschrift einer Abbildung $f : M \longrightarrow N$ kann durch eine Tabelle gegeben sein:

x	$f(x)$
a	1
b	3
c	4
d	3

$M = \{a, b, c, d\}$, $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

Zur Veranschaulichung zeichnen wir die Mengen M und N als Punktmengen in der Ebene und geben die Zuordnungen durch Pfeile an:



b) Die Zuordnungsvorschrift kann durch eine Formel gegeben sein:

Die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = x^2 + 1$ (für alle $x \in \mathbb{R}$).

Zur Veranschaulichung können wir das Bild (den Graphen) dieser Abbildung zeichnen.

c) Geometrie: Drehungen, Spiegelungen, Parallelverschiebungen der Ebene sind Beispiele für Abbildungen.

d) Algebra: Gruppenhomomorphismen sind strukturverträgliche Abbildungen.

- e) Zahlentheorie: Zahlentheoretische Funktionen sind Abbildungen $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$.
- f) Graphentheorie: Graphenisomorphismen sind spezielle Abbildungen zwischen Graphen.
- g) Ist M eine nichtleere Menge, so heißt die Abbildung $\text{id}_M : M \longrightarrow M, x \longmapsto x$, die **identische Abbildung auf M** .

(1.3) DEF: Zwei Abbildungen $f : M \longrightarrow N$ und $g : M' \longrightarrow N'$ heißen **gleich** (in Zeichen: **$f = g$**), wenn die drei folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- 1) $M = M'$ 2) $N = N'$ 3) $f(x) = g(x)$ für alle $x \in M$.

Achtung: Sind $f, g : M \longrightarrow N$ zwei Abbildungen mit demselben Definitionsbereich und demselben Wertebereich, so gilt:
 $f \neq g$ $\iff$ es gibt ein $x_0 \in M$ mit $f(x_0) \neq g(x_0)$.



(1.4) DEF: Sind $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ Abbildungen, so ist die Abbildung $g \circ f : M \longrightarrow P$ definiert durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad (\text{für alle } x \in M)$$

$g \circ f$ heißt die **Hintereinanderausführung** (oder Verkettung) von f und g .

Achtung: $g \circ f$ ist nur definiert, wenn der Wertebereich von f mit dem Definitionsbereich von g übereinstimmt. $g \circ f$ wird gebildet, indem zuerst f und dann g ausgeführt wird.



(1.5) BEISPIELE: a) Für die Abbildungen $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}, f(z) = z^2 + 1$, $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}, g(n) = \frac{n}{2} + 3$ ist $g \circ f$ eine Abbildung $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$, und es gilt z.B.: $(g \circ f)(-2) = \frac{11}{2}$. $f \circ g$ ist nicht definiert!

- b) Die Hintereinanderausführung einer Spiegelung mit sich selbst ist die Identität.
- c) Die Hintereinanderausführung einer Drehung um 50° und einer Drehung um 60° mit demselben Mittelpunkt P ist die Drehung um 110° um P .

(1.6) SATZ: a) Für Abbildungen $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow P$ und $h : P \longrightarrow Q$ gilt
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

d.h. es gilt das **Assoziativgesetz** für die Hintereinanderausführung von Abbildungen.

b) Für Abbildungen $f, g : M \longrightarrow M$ gilt nicht notwendig $g \circ f = f \circ g$, d.h. das **Kommutativgesetz** gilt i.a. **nicht** für die Hintereinanderausführung von Abbildungen.

c) Ist $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung, so gilt $f \circ \text{id}_M = f$ und $\text{id}_N \circ f = f$.

(1.7) DEF: Eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ heißt **injektiv**, wenn jedes Element aus N höchstens ein Urbild unter f in M besitzt.

(1.8) SATZ: Kriterium für die Injektivität

Für eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) f ist injektiv
- b) Für alle $x, x' \in M$ mit $x \neq x'$ folgt $f(x) \neq f(x')$
- c) Für alle $x, x' \in M$ mit $f(x) = f(x')$ folgt $x = x'$.

Achtung: Für eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ gilt automatisch
für alle $x, x' \in M$ mit $x = x'$ folgt $f(x) = f(x')$,
da eine Abbildung durch eine eindeutige Zuordnungsvorschrift definiert ist.



(1.9) SATZ: Für Abbildungen $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ gilt:

- a) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.
- b) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.
- c) Ist $g \circ f$ injektiv, so muß g nicht injektiv sein.

(1.10) DEF: Eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ heißt **surjektiv**, wenn jedes Element aus N mindestens ein Urbild unter f in M besitzt.

(1.11) SATZ: Kriterium für die Surjektivität

Für eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) f ist surjektiv
- b) Zu jedem $y \in N$ gibt es mindestens ein $x \in M$ mit $y = f(x)$.

(1.12) SATZ: Für Abbildungen $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ gilt:

- a) Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.
- b) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.
- c) Ist $g \circ f$ surjektiv, so muß f nicht surjektiv sein.

(1.13) DEF: Eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ heißt **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

(1.14) SATZ: Kriterium für die Bijektivität

Für eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) f ist bijektiv
- b) Jedes Element aus N besitzt unter f genau ein Urbild in M
- c) zu jedem $y \in N$ gibt es genau ein $x \in M$ mit $y = f(x)$.

(1.15) SATZ: Für Abbildungen $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ gilt:

- a) Sind f und g bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv.
- b) Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist f injektiv und g surjektiv.
- c) Ist $g \circ f$ bijektiv, so müssen f oder g nicht bijektiv sein.

(1.16) SATZ: $f : M \longrightarrow N$ sei eine bijektive Abbildung. Dann gilt:

- a) Es gibt eine Abbildung $g : N \longrightarrow M$, die durch die Vorschrift

$$y \in N : g(y) = x \in M : \iff f(x) = y$$

definiert ist (d.h. g bildet ein Element $y \in N$ auf das eindeutig bestimmte Urbild von y unter f ab).

- b) $g \circ f = \text{id}_M$ und $f \circ g = \text{id}_N$
- c) Sind $h, k : N \longrightarrow M$ Abbildungen mit der Eigenschaft $h \circ f = \text{id}_M$ und $f \circ k = \text{id}_N$, so folgt $h = k$.

(1.17) FOLGERUNG: Für eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) f ist bijektiv
- b) Es gibt genau eine Abbildung $g : N \longrightarrow M$ mit der Eigenschaft $g \circ f = \text{id}_M$ und $f \circ g = \text{id}_N$.

(1.18) DEF: Ist $f : M \longrightarrow N$ eine bijektive Abbildung, so heißt die eindeutig bestimmte Abbildung $g : N \longrightarrow M$ mit $g \circ f = \text{id}_M$ und $f \circ g = \text{id}_N$ die **Umkehrabbildung** von f .

Bezeichnung: Die Umkehrabbildung einer bijektiven Abbildung f wird mit f^{-1} bezeichnet.

Achtung: Nur eine bijektive Abbildung besitzt eine Umkehrabbildung.



(1.19) SATZ: a) Die identische Abbildung $\text{id}_M : M \longrightarrow M$ ist bijektiv, und es gilt $\text{id}_M^{-1} = \text{id}_M$.

- b) Sind $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ bijektive Abbildungen, so ist auch die Hintereinanderausführung $g \circ f$ bijektiv, und es gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Achte auf die Reihenfolge!

- c) Ist die Abbildung $f : M \longrightarrow N$ bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : N \longrightarrow M$ bijektiv, und es gilt

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

(1.20) SATZ: Für eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) f ist injektiv
- b) Es gibt eine Abbildung $g : N \longrightarrow M$ mit der Eigenschaft $g \circ f = \text{id}_M$.

(1.21) SATZ: Für eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) f ist surjektiv
- b) Es gibt eine Abbildung $h : N \longrightarrow M$ mit der Eigenschaft $f \circ h = \text{id}_N$.