A) Exkurs: Endliche Mengen

(A.1) Definition: Eine nichtleere Menge M heißt **endlich**, wenn es eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $M \longrightarrow \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ gibt. m heißt dann die Anzahl der Elemente von M, in Zeichen $m =: |M|$.

Die leere Menge $\emptyset$ ist **endlich** und hat 0 Elemente: $|\emptyset| = 0$.

Eine Menge, die nicht endlich ist, heißt **unendlich**.

(A.2) Satz: M sei eine endliche Menge. Dann gilt:

a) Jede Teilmenge $U \subseteq M$ von M ist wieder endlich, und es gilt $|U| \leq |M|$.

b) Ist $U \subseteq M$ eine Teilmenge von M, die genausoviel Elemente wie M hat (d.h. $|U| = |M|$), so folgt $U = M$.

(A.3) Satz: M und N seien endliche Mengen.

a) Dann ist auch die Vereinigungsmenge $M \cup N$ eine endliche Menge, und es gilt

$$|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|$$

b) Gilt $M \cap N = \emptyset$ (d.h. sind M und N **disjunkt**), so folgt

$$|M \cup N| = |M| + |N|.$$

(A.4) Satz: M und N seien endliche Mengen. Dann ist das kartesische Produkt

$$M \times N = \{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}$$

endlich, und es gilt

$$|M \times N| = |M| \cdot |N|.$$

(A.5) Beispiel: Bei unendlichen Mengen können Phänomene auftreten, die bei endlichen Mengen nicht auftreten können und die sehr verblüffend sein können: Definiere eine Abbildung $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ durch die Vorschrift:

$$f(z) := \begin{cases} 2z - 1 & \text{, falls } z > 0 \\ -2z & \text{, falls } z \leq 0 \end{cases}$$

Diese Abbildung ist bijektiv! Mathematisch bedeutet dies, dass $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}_0$ in einem gewissen Sinne “gleichviel” Elemente haben, obwohl $\mathbb{N}_0$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ ist!