§9: Die Dimension eines Vektorraumes

(9.1) DEF: Sei V ein Vektorraum . Eine Teilmenge $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ heißt eine **Basis von V**, wenn B ein linear unabhängiges EZS von V ist.

(9.2) SATZ: Sei V ein Vektorraum . Für eine Teilmenge $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) B ist eine Basis von V

b) Jeder Vektor aus V läßt sich in eindeutiger Weise als LK der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ darstellen.

(9.3) BEISPIELE: a) Die Menge der drei Einheitsvektoren ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Eine andere Basis von $\mathbb{R}^3$ ist die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Auch jede andere Basis von $\mathbb{R}^3$, die man findet, hat immer genau 3 Elemente.

b) Sei $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ die Menge der Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^n$. Dann ist B nach (7.5) eine Basis von $\mathbb{R}^n$, die sog. **kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$** .

c) Die Menge $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\} \subseteq \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ ist ein EZS von $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ (8.13d) und nach (8.18b) linear unabhängig und damit eine Basis von $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

d) In dem Vektorraum V_2 der Vektoren in der Ebene seien $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ zwei aufeinander senkrecht stehende Vektoren der Länge 1. Die Menge $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ist dann ein linear unabhängiges EZS von V_2 , also eine Basis von V_2 .

e) In dem Vektorraum V_3 der Vektoren des Raumes seien $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ drei paarweise aufeinander senkrecht stehende Vektoren der Länge 1. Die Menge $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ist dann ein linear unabhängiges EZS von V_3 , also eine Basis von V_3 .

(9.4) SATZ: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum mit einer Basis $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$. Dann ist jede Teilmenge von U mit mehr als m Elementen linear abhängig.

(9.5) FOLG: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum mit einer Basis $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ aus m Elementen, so hat auch jede andere Basis von U genau m Elemente.

(9.6) FOLG: a) Jede Basis von $\mathbb{R}^n$ hat genau n Elemente.

b) Jede Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit mehr als n Elementen ist linear abhängig.

(9.7) SATZ: V sei ein Vektorraum und $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ sei eine linear unabhängige Teilmenge von V . Dann gilt für einen Vektor $v \in V$

$$T \cup \{v\} \text{ linear unabhängig} \iff v \notin \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(T) \,.$$

(9.8) SATZ: Sei $0 \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Dann gilt:

a) U besitzt eine Basis.

b) Jede Basis von U hat höchstens n Elemente.

Bisher haben wir Vektorräume betrachtet, die Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$ waren. Jetzt wollen wir allgemeine Vektorräume untersuchen.

(9.9) SATZ: Sei $V \neq 0$ ein Vektorraum mit einem EZS $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$. Dann enthält T eine Teilmenge B, die eine Basis von V ist.

(9.10) SATZ: Sei V ein Vektorraum mit einer Basis $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ aus m Vektoren. Dann ist jede Teilmenge von V mit mehr als m Vektoren linear abhängig.

Bew: Der Beweis verläuft analog zum Beweis von (9.4).

Es genügt zu zeigen, daß jede Teilmenge $T = \{w_1, w_2, \ldots, w_m, w_{m+1}\} \subseteq V$ aus $m+1$ Vektoren linear abhängig ist.

Wir müssen zeigen, daß es reelle Koeffizienten $r_1, r_2, \ldots, r_{m+1}$ gibt, die nicht alle 0 sind, so daß gilt:

$$(\star) \quad r_1 w_1 + r_2 w_2 + \ldots + r_{m+1} w_{m+1} = o_V$$

Da B eine Basis von V ist, läßt sich jeder der Vektoren aus T als LK der Basisvektoren $v_1, v_2, \ldots, v_m$ darstellen, d.h.

$$w_k = s_{1k}v_1 + s_{2k}v_2 + \ldots + s_{mk}v_m \quad (s_{ik} \in \mathbb{R}\,,\ i = 1, 2, \ldots, m\ ,\ k = 1, 2, \ldots, m+1)\,.$$

Diese Darstellungen setzen wir in $(\star)$ ein und ordnen die Summanden so um, daß eine LK von $v_1, v_2, \ldots, v_m$ entsteht. Aus schreibtechnischen Gründen führen wir die Rechnung für $m = 3$ durch, der allgemeine Fall geht dann ganz analog. $(\star)$ wird dabei zu

$$(\star\star) \quad r_1 w_1 + r_2 w_2 + r_3 w_3 + r_4 w_4 = o_V$$

Wir stellen nun w_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ als LK von v_1, v_2, v_3 dar:

$$\begin{aligned} w_1 &= s_{11}v_1 + s_{21}v_2 + s_{31}v_3 \\ w_2 &= s_{12}v_1 + s_{22}v_2 + s_{32}v_3 \\ w_3 &= s_{13}v_1 + s_{23}v_2 + s_{33}v_3 \\ w_4 &= s_{14}v_1 + s_{24}v_2 + s_{34}v_3 \end{aligned}$$

Eingesetzt in $(\star\star)$ und nach den Vektoren v_1, v_2, v_3 sortiert ergibt dies:

$$\begin{aligned} o_V &= r_1 w_1 + r_2 w_2 + r_3 w_3 + r_4 w_4 \\ &= r_1(s_{11}v_1 + s_{21}v_2 + s_{31}v_3) + r_2(s_{12}v_1 + s_{22}v_2 + s_{32}v_3) + \\ &\quad\ r_3(s_{13}v_1 + s_{23}v_2 + s_{33}v_3) + r_4(s_{14}v_1 + s_{24}v_2 + s_{34}v_3) \\ &= (r_1 s_{11} + r_2 s_{12} + r_3 s_{13} + r_4 s_{14})v_1 + (r_1 s_{21} + r_2 s_{22} + r_3 s_{23} + r_4 s_{24})v_2 + \\ &\quad\ (r_1 s_{31} + r_2 s_{32} + r_3 s_{33} + r_4 s_{34})v_3 \end{aligned}$$

Wir erhalten also eine LK der linear unabhängigen Vektoren v_1, v_2, v_3, die gleich o_V ist, so daß alle Koeffizienten 0 sein müssen, d.h.

$$\begin{aligned} r_1 s_{11} + r_2 s_{12} + r_3 s_{13} + r_4 s_{14} &= 0 \\ r_1 s_{21} + r_2 s_{22} + r_3 s_{23} + r_4 s_{24} &= 0 \\ r_1 s_{31} + r_2 s_{32} + r_3 s_{33} + r_4 s_{34} &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist ein homogenes LGS aus 3 Gleichungen für die 4 Unbekannten r_1, r_2, r_3, r_4, das nach (3.14) eine nichttriviale Lösung $(t_k) \in \mathbb{R}^4$ besitzt, da die Anzahl der Gleichungen kleiner als die Anzahl der Unbekannten ist. Bilden wir mit diesen Koeffizienten t_1, t_2, t_3, t_4, die nicht alle 0 sind, die LK

$$t_1 w_1 + t_2 w_2 + t_3 w_3 + t_4 w_4 \,,$$

und führen hierfür die obigen Rechnungen durch, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{\underline{t_1 w_1 + t_2 w_2 + t_3 w_3 + t_4 w_4}} &= (t_1 s_{11} + t_2 s_{12} + t_3 s_{13} + t_4 s_{14}) v_1 \\ &\quad + (t_1 s_{21} + t_2 s_{22} + t_3 s_{23} + t_4 s_{24}) v_2 \\ &\quad + (t_1 s_{31} + t_2 s_{32} + t_3 s_{33} + t_4 s_{34}) v_3 \\ &= 0 v_1 + 0 v_2 + 0 v_3 \\ &= \underline{\underline{o_V}} \end{aligned}$$

Wir erhalten also eine LK von w_1, w_2, w_3, w_4, die den Nullvektor ergibt, bei der nicht alle Koeffizienten 0 sind. Folglich ist T nach (8.17a) linear abhängig.

<u>(9.11) FOLG:</u> Ist V ein Vektorraum mit einer Basis $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ aus m Vektoren, so enthält auch jede andere Basis von V genau m Vektoren.

<u>Bew:</u> Sei $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ eine zweite Basis von V. Wir müssen $k = m$ zeigen.

Annahme: $k > m$. Dann ist C nach (9.10) linear abhängig im Widerspruch dazu, daß C als Basis linear unabhängig ist. Folglich $k \leq m$.

Annahme: $k < m$. Da C eine Basis von V ist, ist nach (9.10) jede Teilmenge mit mehr als k Elementen linear abhängig, so daß dann auch die Basis B linear abhängig sein müßte. **Widerspruch!**

Aus $k \leq m$ und $k \geq m$ folgt die Behauptung $k = m$.

Diese Folgerung macht die folgende Definition sinnvoll:

<u>(9.12) DEF:</u> Sei $V \neq 0$ ein Vektorraum mit einer Basis $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ aus m Vektoren. Dann heißt m die **Dimension von V**, in Zeichen

$$m =: \dim_{\mathbb{R}}(V)\,.$$

Man bezeichnet dann V auch als einen **m–dimensionalen Vektorraum**.

Dem Nullvektorraum (das ist ein Vektorraum , der nur aus dem Nullvektor besteht) wird die Dimension 0 zugewiesen.

(9.13) BEM: $\dim_{\mathbb{R}}(V) = m$ bedeutet, daß der Vektorraum V eine Basis aus m Vektoren besitzt und folglich jede andere Basis von V ebenfalls aus genau m Vektoren besteht.

(9.14) BEISPIELE :

V	$\dim_{\mathbb{R}}(V)$	Begründung
V_2	2	$(9.3d)$
V_3	3	$(9.3e)$
$\mathbb{R}^3$	3	$(9.3a)$
$\mathbb{R}^n$	n	$(9.3b)$
$\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$	4	$(9.3c)$
$\mathsf{M}_{2,3}(\mathbb{R})$	$2 \cdot 3 = 6$	
$\mathsf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$	$m \cdot n$	
$\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$	n^2	

Wir wollen jetzt ein altbekanntes Ergebnis über die Lösungsmenge eines homogenen LGS's in seine endgültige Form bringen:

(9.15) SATZ: Sei $A \in \mathsf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ eine Matrix von Rang r. Dann gelten für die Lösungsmenge $\mathbb{L}_0 = \text{Lös}(A, o_m) \subseteq \mathbb{R}^n$ des homogenen LGS's $Ax = o_m$ die folgenden Aussagen:

a) $\mathbb{L}_0$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$

b) $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{L}_0) = n - r$ (= Anzahl der Unbekannten − Rang der Koeffizientenmatrix).

Bew: a) Gilt nach (8.6a)

b) Nehmen wir erforderlichenfalls Umformungen mit der Treppenform von A vor (Vertauschungen von Spalten, Einfügen und/oder Streichen von Nullzeilen), so gibt es nach (7.18) ein EZS $T = \{u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_n\}$ von $\mathbb{L}_0$ aus $n - r$ Elementen. Dabei sind

$$u_{r+1} = \begin{pmatrix} \star \\ \vdots \\ \star \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{r+2} = \begin{pmatrix} \star \\ \vdots \\ \star \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad u_n = \begin{pmatrix} \star \\ \vdots \\ \star \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

n–Tupel, bei denen die ersten r Komponenten jeweils irgendwelche reelle Zahlen sind. Wir wollen zeigen, daß T auch linear unabhängig ist: Gelte

$$s_{r+1}u_{r+1} + s_{r+2}u_{r+2} + \ldots + s_n u_u \;=\; o_n$$

mit reellen Koeffizienten s_j. Rechnen wir die linksstehende LK aus, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \star \\ \vdots \\ \star \\ -s_{r+1} \\ -s_{r+2} \\ \vdots \\ -s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

woraus sich $-s_j = 0$, also $s_j = 0$ für alle $j = r+1, r+2, \ldots, n$ ergibt. Daher ist T nach (8.17b) linear unabhängig. Insgesamt ist also T eine Basis von $I\!L_0$. Da T genau $n-r$ Elemente enthält, folgt die Behauptung $\dim_{\mathbb{R}}(I\!L_0) = n-r$.