Kap. III : Vektorräume

§8: Der Begriff des Vektorraumes

Wir haben früher folgende Beispiele betrachtet:

- Die Menge aller Vektoren in der anschaulichen Ebene
- Die Menge aller Vektoren im Anschauungsraum
- Die Menge $\mathbb{R}^n$ der n–Tupel reeller Zahlen
- Die Menge $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ der $(m \times n)$–Matrizen

Das Gemeinsame an all diesen Beispielen ist, daß jeweils eine Menge gegeben ist, auf der zwei Rechenoperationen definiert sind, und zwar

- eine Addition und
- eine skalare Multiplikation mit reellen Zahlen.

Es gelten nun für die beiden Verknüpfungen in allen Beispielen ganz entsprechende Rechenregeln. Wir definieren im folgenden den allgemeinen Begriff eines Vektorraumes, unter dem sich alle angeführten Beispiele wiederfinden lassen. Dazu abstrahieren wir zum einen von der speziellen Menge (Menge der Vektoren der Ebene oder des Raumes, der n–Tupel, der $(m \times n)$–Matrizen) und der speziellen Definition der Rechenoperationen (Vektoradditon, Addition von n–Tupeln bzw. Matrizen und die jeweiligen skalaren Multiplikationen). Wir gehen also von einer ganz beliebigen Menge aus, über deren Elemente wir keine näheren Informationen haben, und von zwei auf dieser Menge definierten Verknüpfungen, von denen wir auch nicht wissen, wie sie definiert sein sollen. Das Entscheidende ist aber, daß für diese beiden Rechenoperationen Rechenregeln gelten, die denen in den Beispielen entsprechen.

Aus diesen Grund–Rechenregeln lassen sich ganz allgemein weitere Rechenregeln herleiten, die dann auch in allen konkreten Beispielen für Vektorräume gültig sein müssen. Dies ist natürlich eine enorme Arbeitserleichterung: Eine einmal allgemein für Vektorräume bewiesene Rechenregel gilt in allen Fällen, in denen ein konkreter Vektorraum vorliegt. Wir haben auch schon in früheren Übungsaufgaben (s. Aufgaben 14 und 18) gesehen, wie sich für die Rechenoperationen auf $\mathbb{R}^n$ aus den Grundregeln weitere Rechenregeln herleiten lassen.

Wir werden dann auch noch allgemeinere Eigenschaften beliebiger Vektorräume untersuchen, die wir in gewissen Spezialfällen schon kennengelernt haben. Insbesondere geht es um eine Verallgemeinerung der Überlegungen, die wir bei der Beschreibung der Lösungsmenge eines homogenen LGS's angestellt haben.

(8.1) DEF: Eine Menge V zusammen mit zwei Rechenoperationen $+$ (Addition) und $\cdot_{\mathbb{R}}$ (Skalarmultiplikation mit reellen Zahlen) heißt ein **reeller Vektorraum** (oder **Vektoraum über dem Körper der reellen Zahlen**), wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

A_0) Je zwei Elementen v und w aus V wird eine eindeutig bestimmte Summe $v + w \in V$ zugeordnet

A_1) Für alle $u, v, w \in V$ gilt $(u + v) + w = u + (v + w)$
(Assoziatives Gesetz)

A_2) Für alle $v, w \in V$ gilt $v + w = w + v$
(Kommutatives Gesetz)

A_3) Es existiert $o_V \in V$ mit $v + o_V = v$ für alle $v \in V$
(Existenz eines Nullelementes)

A_4) Zu jedem $v \in V$ gibt es ein $w \in V$ mit $v + w = o_V$
(Existenz von negativen Elementen)

SM_0) Jedem $r \in \mathbb{R}$ und jedem $v \in V$ wird ein eindeutig bestimmtes Element $rv \in V$ zugeordnet

$$\left.\begin{array}{ll} SM_1) & r(v+w) = rv + rw \\ SM_2) & (r+s)v = rv + sv \\ SM_3) & r(sv) = (rs)v \\ SM_4) & 1\,v = v \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{für alle } v, w \in V \\ \text{und alle } r, s \in \mathbb{R}\end{array}$$

Bezeichnungen und Bemerkungen:

Wir werden im folgenden einen reellen Vektorraum auch kurz nur als Vektorraum bezeichnen.

Die Elemente eines Vektorraumes über $\mathbb{R}$ heißen **Vektoren** , die Elemente aus $\mathbb{R}$ **Skalare**. Das Element $o_V \in V$ nach A_3) ist eindeutig bestimmt (s. (8.3a)) und heißt der **Nullvektor in** V. Das zu v nach A_4) existierende Element $w \in V$ mit $v + w = o_V$ ist eindeutig bestimmt (s. (8.3b)) und heißt der zu v **negative Vektor** . Er wird mit $-v$ bezeichnet. Außerdem setzt man $v - w := v + (-w)$ für zwei Vektoren $v, w \in V$.

(8.2) BEISPIELE: **a)** Die Menge V der Vektoren der Ebene zusammen mit der Vektoraddition und der Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen ist nach (0.1) ein reeller Vektorraum.

b) Die Menge der Vektoren des Raumes zusammen mit der Vektoraddition und der Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen ist ein reeller Vektorraum.

c) Die Menge $\mathbb{R}^n$ der n–Tupel reeller Zahlen mit der komponentenweise definierten Addition und skalaren Multiplikation ist nach (3.5) und (3.8) ein reeller Vektorraum.

d) Die Menge $M_{m,n}(\mathbb{R})$ der $(m \times n)$–Matrizen reeller Zahlen mit der elementweise definierten Addition und skalaren Multiplikation ist nach (4.3) und (4.6) ein reeller Vektorraum.

(8.3) BEM: **a)** In einem Vektorraum V gibt es genau einen Nullvektor.

b) In einem Vektorraum V gibt es zu einem Vektor $v \in V$ genau einen negativen Vektor.

(8.4) SATZ: Rechenregeln in einem Vektorraum V

Für beliebige Vektoren $v, w \in V$ und Skalare $r, s \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $0v = o_V$

b) $r o_V = o_V$

c) $-(rv) = (-r)v = r(-v)$ (insbesondere $-v = (-1)v$)

d) $rv = o_V \implies (r = 0$ oder $v = o_V)$

e) $r \neq 0$ und $rv = rw \implies v = w$

f) $v \neq o_V$ und $rv = sv \implies r = s$.

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ eines homogenen LGS's besitzt nach (3.10) die folgenden Eigenschaften:

a) $o_n \in \mathbb{L}_0$

b) $c, c' \in \mathbb{L}_0 \implies c + c' \in \mathbb{L}_0$

c) $r \in \mathbb{R}\,,\ c \in \mathbb{L}_0 \implies rc \in \mathbb{L}_0$

Entsprechende Bedingungen gelten für die Menge $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(a_1, a_2, \ldots, a_r) \subseteq \mathbb{R}^n$ aller Linearkombinationen der n–Tupel $a_1, a_2, \ldots, a_r$ (s. (3.18)). Man kann in beiden Fällen die Teilmengen selbst als Vektorräume auffassen, die in dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ enthalten sind (s. (8.7)). Dies motiviert die folgende Begriffsbildung:

(8.5) DEF: V sei ein Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein **Untervektorraum (UVR) von V**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

U_1) $o_V \in U$

U_2) Für alle $u, u' \in U$ gilt $u + u' \in U$

U_3) Für alle $r \in \mathbb{R}$ und alle $u \in U$ gilt $ru \in U$.

(8.6) BEISPIELE: a) Die Lösungsmenge eines homogenen LGS's in n Unbekannten ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ (3.10).

b) Die Menge aller Linearkombination von Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ (3.18).

c) Ist V ein beliebiger Vektorraum, so sind $\{o_V\}$ und V Untervektorräume von V.

d) Für einen beliebigen Vektor $v \in V$ ist $U := \{\, rv \mid r \in \mathbb{R} \,\}$ ein Untervektorraum von V.

(8.7) BEM: Ein Untervektorraum U eines Vektorraumes V ist für sich betrachtet selbst wieder ein Vektorraum. Wegen U_2) gibt es eine Addition auf U und wegen U_3) gibt es eine skalare Multiplikation auf U. Für die Addition auf U gelten die Regeln A_0), A_1) und A_2). o_V ist auch das Nullelement in U; denn $o_V \in U$ nach U_1) und $u + o_V = u$ für alle $u \in U$ nach A_3). Für einen beliebigen Vektor $u \in U$ gilt wegen (8.4c) $-u = (-1)u \in U$ nach U_3) und $u + (-u) = o_V$ nach A_4). Damit gibt es zu jedem Vektor aus U einen negativen Vektor in U. Die Regeln für die skalare Multiplikation sind auch in U erfüllt, da sie in V gelten.

Wie in (3.16) definieren wir:

(8.8) DEF: Sei $\boldsymbol{V}$ ein Vektorraum. Sind dann $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ Vektoren und $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ Skalare, so heißt ein Ausdruck der Form

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n$$

eine **Linearkombination (LK)** der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Mit

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

wird die **Menge aller Linearkombinationen von** $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bezeichnet.

(8.9) BEISPIELE: a) $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(o_v) = \{o_V\}$

b) $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(v) = \{ rv \mid r \in \mathbb{R} \}$

c) $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2) = \{ r_1 v_1 + r_2 v_2 \mid r_1, r_2 \in \mathbb{R} \}$.

(8.10) SATZ: Sei V ein Vektorraum, und seien $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ Vektoren. Dann ist $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ein Untervektorraum von V, und es gilt

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

Man nennt $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ den **von der Menge** $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ **erzeugten Untervektorraum von** V.

(8.11) BEISPIELE: a) Für die Einheitsvektoren $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(e_1, e_2) = \left\{ \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, r_1, r_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Für die Einheitsvektoren $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ gilt $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$.

c) Seien $E_{11} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Dann ist $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E_{11}, E_{22})$ die Menge aller Diagonalmatrizen in $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Diese Menge ist daher automatisch ein Untervektorraum von $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

d) Seien $E_{12} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Mit den schon in c) definierten Matrizen E_{11} und E_{22} gilt dann $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Ist V ein Vektorraum und sind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ Vektoren in V, so ist $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, \ldots, v_n) \subseteq V$ ein Untervektorraum von V. Dieser Untervektorraum kann gleich V sein. Dann ist jeder Vektor aus V eine LK der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Dieser Fall ist besonders interessant und führt zu folgender Definition:

(8.12) DEF: V sei ein Vektorraum und $v_1, v_2, \ldots, v_n$ seien Vektoren aus V. Dann heißt die Teilmenge $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ ein **Erzeugendensystem (EZS) von** V, wenn

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = V$$ gilt.

(8.13) BEISPIELE: aus (8.11)

a) $\{e_1, e_2\}$ ist **kein** EZS von $\mathbb{R}^3$.

b) $\{e_1, e_2, e_3\}$ ist ein EZS von $\mathbb{R}^3$.

c) $\{E_{11}, E_{22}\}$ ist **kein** EZS von $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.

d) $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ ist ein EZS von $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.

e) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ der Einheitsvektoren aus $\mathbb{R}^n$ ein EZS von $\mathbb{R}^n$ (s. (7.5a)).

Wir wollen jetzt die Frage untersuchen, ob sich ein EZS eines Vektorraumes V noch "verkürzen" läßt, d.h. ob ein EZS T von V noch ein EZS von V bleibt, wenn man einen oder mehrere Vektoren aus T entfernt.

(8.14) SATZ: V sei ein Vektorraum, und $v_1, v_2, \ldots, v_n$ seien Vektoren aus V. Dann gilt:

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}) \iff v_n \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}).$$

(8.15) DEF: Seien V ein Vektorraum und $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ eine beliebige (endliche) Teilmenge von V. Dann heißt T **linear abhängig**, wenn sich einer der Vektoren aus T als eine Linearkombination der übrigen Vektoren aus T darstellen läßt.

Ist T nicht linear abhängig, so heißt T **linear unabhängig**.

(8.16) BEISPIELE: a) Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann ist $T = \{v_1, v_2, v_3\}$ linear abhängig, da $v_3 = v_1 + v_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2)$ gilt. $T \setminus \{v_3\} = \{v_1, v_2\}$ ist dagegen linear unabhängig, da weder v_1 eine LK von v_2 noch v_2 eine LK von v_1 ist.

b) Die Menge der Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^n$ ist linear unabhängig, da kein Einheitsvektor eine LK der übrigen ist.

(8.17) SATZ: Seien V ein Vektorraum und $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ eine beliebige (endliche) Teilmenge von V. Dann gilt:

a) T ist genau dann linear abhängig, wenn es Skalare $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ gibt, die **nicht alle** 0 sind, so daß $r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n = o_V$ gilt.

b) T ist genau dann linear unabhängig, wenn für alle Skalare $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$, für die $r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n = o_V$ gilt, stets $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$ folgt.

ACHTUNG: Es gibt immer eine LK der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$, die den Nullvektor ergibt, nämlich

$$0v_1 + 0v_2 + \ldots 0v_n \;=\; o_V \,.$$

Das Besondere an der Bedingung in (8.17a) ist also im Falle der linearen Abhängigkeit, daß es eine LK

$$r_1v_1 + r_2v_2 + \ldots + r_nv_n = o_V$$

gibt, bei der nicht alle Koeffizienten gleich 0 sind, d.h. es gibt einen Index $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit der Eigenschaft $r_k \neq 0$.

(8.18) BEISPIELE: a) Sei $T = \{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{R}^2$ aus (8.16a). Dafür gilt $v_3 = v_1 + v_2$ oder

$$1\,v_1 + 1\,v_2 + (-1)\,v_3 \;=\; o_V\,,$$

d.h. diese LK von v_1, v_2, v_3 ist der Nullvektor, wobei sogar alle Koeffizienten $\neq 0$ sind. Folglich ist T nach (8.17a) linear abhängig.

b) Sei $T = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\} \subseteq \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ (s. (8.11) c) und d)). Es sei

$$(\star) \quad r_{11}E_{11} + r_{12}E_{12} + r_{21}E_{21} + r_{22}E_{22} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (r_{ik} \in \mathbb{R})$$

irgendeine LK, die die Nullmatrix (also den Nullvektor in $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$) ergibt. Rechnet man die linke Seite aus, so erhält man

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

d.h. die LK $(\star)$ kann nur dann den Nullvektor ergeben, wenn sämtliche Koeffizienten 0 sind. Nach (8.17b) ist daher T linear unabhängig.

(8.19) SATZ: Seien V ein Vektorraum und $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ eine beliebige (endliche) Teilmenge von V. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) T ist linear unabhängig

b) Jeder Vektor aus $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ läßt sich in eindeutiger Weise als LK von $v_1, v_2, \ldots, v_n$ darstellen.

(8.20) BEISPIELE: a) Nach (7.5b) läßt sich jeder Vektor aus $\mathbb{R}^n$ in eindeutiger Weise als LK der Einheitsvektoren $e_1, e_2, \ldots, e_n$ darstellen. Folglich ist $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ nach (8.19) linear unabhängig.

b) Sei $T = \{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{R}^2$ die Menge aus Beispiel (8.16a). Dann gilt

$$0v_1 + 0v_2 + 1v_3 \;=\; v_3 \;=\; 1v_1 + 1v_2 + 0v_3\,,$$

so daß sich v_3 auf unterschiedliche Weise als LK von v_1, v_2, v_3 darstellen läßt. Folglich ist T nach (8.19) linear abhängig.