

§6: Elementarmatrizen

(6.1) DEF: Unter einer **elementaren Zeilenumformung** einer Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ versteht man eine der folgenden Operationen:

- 1) die (komponentenweise ausgeführte) Addition des r -fachen einer Zeile von A zu einer anderen Zeile von A ($r \in \mathbb{R}$).
- 2) die (komponentenweise ausgeführte) Multiplikation einer Zeile von A mit einer reellen Zahl $\neq 0$.
- 3) die Vertauschung zweier Zeilen von A .

(6.2) DEF: Eine $(n \times n)$ -**Elementarmatrix** ist eine Matrix des folgenden Typs:

a) **Additionsmatrix** $A_{ik}(r) \in M_n(\mathbb{R})$ ($i \neq k$, $r \in \mathbb{R}$)

$A_{ik}(r)$ entsteht aus der $(n \times n)$ -Einheitsmatrix E_n dadurch, daß an der Stelle (i, k) das Element 0 durch die reelle Zahl r ersetzt wird.

b) **Multiplikationsmatrix** $M_i(r) \in M_n(\mathbb{R})$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

$M_i(r)$ entsteht aus der $(n \times n)$ -Einheitsmatrix E_n dadurch, daß an der Stelle (i, i) das Element 1 durch die reelle Zahl $r \neq 0$ ersetzt wird.

c) **Vertauschungsmatrix** $V_{ik} \in M_n(\mathbb{R})$ ($i \neq k$)

V_{ik} entsteht aus der $(n \times n)$ -Einheitsmatrix E_n dadurch, daß die i -te Zeile mit der k -ten Zeile vertauscht wird.

Ausführlicher geschrieben bedeutet dies in den drei Fällen:

a) Additionsmatrix

$$A_{ik}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & \vdots & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & 0 & \textcolor{red}{r} & 0 & \dots & \dots \\ & & & \vdots & & 0 & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & \vdots & & & 1 & & & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ & & & \vdots & & & & 1 & & \\ & & & \vdots & & & & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \leftarrow k\text{-te Zeile} \end{array}$$

$\uparrow$ i -te Spalte $\uparrow$ k -te Spalte

b) Multiplikationsmatrix

$$M_i(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \\ & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \textcolor{red}{r} & 0 & \dots & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Zeile}$$

$\uparrow$ i -te Spalte

c) Vertauschungsmatrix:

$$V_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ & & 1 & \vdots & & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \color{red}{0} & \dots & \dots & 0 & \color{red}{1} & 0 & \dots & \dots \\ & & & \vdots & 1 & & 0 & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \vdots & & & & \\ & & 0 & & & & 1 & \vdots & & & \\ \dots & \dots & 0 & \color{red}{1} & 0 & \dots & \dots & \color{red}{0} & \dots & \dots & \dots \\ & & 0 & & & & & \vdots & 1 & & \\ & & \vdots & & & & & \vdots & & \ddots & \\ & & \vdots & & & & & \vdots & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \leftarrow k\text{-te Zeile} \\ \\ \end{matrix}$$

$\uparrow$ i -te Spalte $\uparrow$ k -te Spalte

Beispiele: a) Additionsmatrizen in $M_3(\mathbb{R})$:

$$A_{13}(r) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + r \cdot 7 & 2 + r \cdot 8 & 3 + r \cdot 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$A_{13}(r) \cdot A$ entsteht aus A durch Addition des r -fachen der dritten Zeile zur ersten Zeile.

$$A \cdot A_{13}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \cdot r + 3 \\ 4 & 5 & 4 \cdot r + 6 \\ 7 & 8 & 7 \cdot r + 9 \end{pmatrix}$$

$A \cdot A_{13}(r)$ entsteht aus A durch Addition des r -fachen der ersten Spalte zur dritten Spalte.

b) Multiplikationsmatrizen in $M_3(\mathbb{R})$:

$$M_2(r) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ r \cdot 4 & r \cdot 5 & r \cdot 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$M_2(r) \cdot A$ entsteht aus A durch Multiplikation der zweiten Zeile von A mit r .

$$A \cdot M_2(r) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot r & 3 \\ 4 & 5 \cdot r & 6 \\ 7 & 8 \cdot r & 9 \end{pmatrix}$$

$A \cdot M_2(r)$ entsteht aus A durch Multiplikation der zweiten Spalte von A mit r .

c) Vertauschungsmatrizen in $M_3(\mathbb{R})$:

$$V_{12} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$V_{12} \cdot A$ entsteht aus A durch Vertauschen der ersten Zeile mit der zweiten Zeile.

$$A \cdot V_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$A \cdot V_{12}$ entsteht aus A durch Vertauschen der ersten Spalte mit der zweiten Spalte.

(6.3) SATZ: a) Eine elementare Zeilenumformung einer $(m \times n)$ -Matrix A wird durch **Links**-multiplikation von A mit einer $(m \times m)$ -Elementarmatrix bewirkt.

b) Durch **Rechts**multiplikation einer $(m \times n)$ -Matrix A mit einer $(n \times n)$ -Elementarmatrix wird eine elementare **Spaltenumformung** von A bewirkt.

(6.4) BEM: a) Im einzelnen gilt:

$A_{ik}(r) \cdot A$ Addition des r -fachen der k -ten Zeile von A zur i -ten Zeile von A

$M_i(r) \cdot A$ Multiplikation der i -ten Zeile von A mit $r \neq 0$

$V_{ik} \cdot A$ Vertauschen der i -ten mit der k -ten Zeile von A

b) Die Multiplikation einer Matrix A mit einer Elementarmatrix von **rechts** bewirkt eine elementare **Spaltenumformung**. Im einzelnen gilt:

$A \cdot A_{ik}(r)$ Addition des r -fachen der i -ten Spalte von A zur k -ten Spalte von A

$A \cdot M_i(r)$ Multiplikation der i -ten Spalte von A mit $r \neq 0$

$A \cdot V_{ik}$ Vertauschen der i -ten mit der k -ten Spalte von A

(6.5) SATZ: a) Die Elementarmatrizen sind invertierbar.

b) Das Inverse einer Elementarmatrix ist wieder eine Elementarmatrix.