

§5: Invertierbare Matrizen

(5.1) DEF: Eine quadratische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ heißt **invertierbar**, wenn es eine Matrix $B \in M_n(\mathbb{R})$ gibt mit der Eigenschaft

$$A \cdot B = E_n = B \cdot A.$$

(5.2) BEM: Ist $A \in M_n(\mathbb{R})$ invertierbar, so gibt es **genau eine** Matrix $B \in M_n(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft $A \cdot B = E_n = B \cdot A$.

B heißt die zu A **inverse Matrix** und wird mit A^{-1} bezeichnet.

Es gilt also: $A \cdot A^{-1} = E_n = A^{-1} \cdot A$.

Probleme: a) Kriterien für die Invertierbarkeit

b) Verfahren zur Berechnung der inversen Matrix.

(5.3) SATZ: Seien $A, B \in M_n(\mathbb{R})$: Dann gilt:

a) Sind A und B invertierbar, so ist auch das Produkt $A \cdot B$ invertierbar, und es gilt

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

b) Die Einheitsmatrix E_n ist invertierbar, und es gilt $E_n^{-1} = E_n$

c) Ist A invertierbar, so ist auch die inverse Matrix A^{-1} invertierbar, und es gilt

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

(5.4) SATZ: Die Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ sei invertierbar. Dann gilt

a) $AB = AC \implies B = C$ b) $BA = CA \implies B = C$.

c) $A^2 = A \implies A = E_n$ d) $AB = O \implies B = O$.

(5.5) SATZ: Die Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ sei invertierbar. Dann ist das LGS

$$(\star) \quad Ax = b$$

für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar.

(5.6) BEM: Ist die Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ invertierbar, so gilt $\text{Lös}(A, b) = \{A^{-1}b\}$. Insbesondere $\text{Lös}(A, o_n) = \{o_n\}$.

(5.7) Gauß –Jordan–Verfahren zur Berechnung der inversen Matrix

$A \in M_n(\mathbb{R})$ sei eine quadratische Matrix. Es soll untersucht werden, ob A invertierbar ist oder nicht. Wenn ja, soll die inverse Matrix berechnet werden.

- a) Schreibe die $(n \times n)$ –Einheitsmatrix E_n rechts neben A .
- b) Durch zulässige Zeilenumformungen (s. d)) wird versucht, A in die Einheitsmatrix E_n zu transformieren. Dieselben Zeilenumformungen werden gleichzeitig mit der rechtsstehenden Einheitsmatrix vorgenommen.
- c) Läßt sich A nicht in die Einheitsmatrix umwandeln, so ist A nicht invertierbar. Anderenfalls ist A invertierbar und aus der Matrix E_n ist die Matrix B geworden.

A	E_n
↓	↓
Zeilenumformungen	Zeilenumformungen
↓	↓
E_n	$B (= A^{-1})$

Nach den vorherigen Überlegungen ist klar, daß $A \cdot B = E_n$ gilt. Daß auch umgekehrt $B \cdot A = E_n$ gilt (was nach Definition (5.1) erforderlich ist), können wir erst später allgemein beweisen. Bis dahin müssen wir dies immer erst noch direkt nachprüfen! Dann ist $B = A^{-1}$.

d) Zulässige Zeilenumformungen einer Matrix A sind:

- 1) die (komponentenweise ausgeführte) Addition einer Zeile von A zu einer anderen Zeile von A .
- 2) die (komponentenweise ausgeführte) Multiplikation einer Zeile von A mit einer reellen Zahl $\neq 0$.
- 3) die Vertauschung zweier Zeilen von A .