

§4: Matrizenrechnung

(4.1) DEF: a) Die Summe $A + B$ zweier $(m \times n)$ -Matrizen $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ ist definiert als $(m \times n)$ -Matrix $C = (c_{ik})$, wobei

$$c_{ik} := a_{ik} + b_{ik}$$

für alle $i = 1, 2, \dots, m$ und alle $k = 1, 2, \dots, n$ gesetzt wird.

b) Die $(m \times n)$ -Matrix O , deren sämtliche Elemente 0 sind, heißt $(m \times n)$ -Nullmatrix.

c) Das Negative $-A$ einer $(m \times n)$ -Matrix $A = (a_{ik})$ ist die $(m \times n)$ -Matrix

$$-A := (-a_{ik}).$$

d) Die Differenz $A - B$ zweier $(m \times n)$ -Matrizen A und B ist definiert durch

$$A - B := A + (-B).$$

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -6 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5 & -3+2 & 5+(-2) \\ 0+(-6) & 1+3 & -4+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist die } (3 \times 2)\text{-Nullmatrix}$$

$$\text{Das Negative von } A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ ist } -A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(4.2) BEM: a) Die Summe zweier Matrizen desselben Formats wird gebildet, indem man die Elemente an den entsprechenden Stellen addiert:

Für $A = (a_{ik}), B = (b_{ik}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ist $A + B = (a_{ik} + b_{ik}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

b) Für $(m \times 1)$ -Matrizen (d.h. m -Tupel) stimmen diese Definitionen mit den früheren überein.

c) Die Matrizenaddition ist eine Verknüpfung (Rechenoperation) auf der Menge $M_{m,n}(\mathbb{R})$ der $(m \times n)$ -Matrizen.

d) **Achtung:** Es lassen sich nur Matrizen desselben Formats addieren!

(4.3) SATZ: Für die Addition auf $M_{m,n}(\mathbb{R})$ gelten die folgenden Regeln:

- A_0) Je zwei Matrizen A und B aus $M_{m,n}(\mathbb{R})$ wird eine eindeutig bestimmte Matrix $A + B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ zugeordnet
- A_1) Für alle $A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ gilt $(A + B) + C = A + (B + C)$
(Assoziatives Gesetz)
- A_2) Für alle $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ gilt $A + B = B + A$
(Kommutatives Gesetz)
- A_3) Es existiert $O \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ mit $A + O = A$ für alle $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$
(Existenz einer Nullmatrix)
- A_4) Zu jedem $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ gibt es ein $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ mit $A + B = O$
(Existenz von negativen Matrizen)

(4.4) DEF: Seien $r \in \mathbb{R}$ und $A = (a_{ik}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Dann ist die Matrix rA definiert durch

$$rA := (ra_{ik}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

Beispiel: Die Matrix rA wird also gebildet, indem man jedes Element von A mit der reellen Zahl r multipliziert.

$$7 \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 2 & 7 \cdot (-3) & 7 \cdot 5 \\ 7 \cdot 0 & 7 \cdot 1 & 7 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -21 & 35 \\ 0 & 7 & -28 \end{pmatrix}.$$

(4.5) BEM: a) Im Falle $n = 1$ ist eine $(m \times n)$ -Matrix ein m -Tupel, und diese Definition stimmt mit der früheren (3.7) überein.

b) Die in (4.4) definierte skalare Multiplikation ordnet einer reellen Zahl r und einer $(m \times n)$ -Matrix A eine $(m \times n)$ -Matrix rA zu.

(4.6) SATZ: Für die skalare Multiplikation auf $M_{m,n}(\mathbb{R})$ gelten die folgenden Regeln:

- SM_0) Jedem Skalar $r \in \mathbb{R}$ und jeder Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ wird eine eindeutig bestimmte Matrix $rA \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ zugeordnet
 - SM_1) $r(A + B) = rA + rB$
 - SM_2) $(r + s)A = rA + sA$
 - SM_3) $r(sA) = (rs)A$
 - SM_4) $1A = A$
- $\left\{ \begin{array}{l} A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \\ \text{und } r, s \in \mathbb{R} \end{array} \right.$

Bew: Wir beweisen exemplarisch SM_1): Seien $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$. Der Deutlichkeit halber werden die Klammern, die eine Matrix einschließen, rot geschrieben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} r(A + B) &\stackrel{(1)}{=} r(a_{ik} + b_{ik}) \stackrel{(2)}{=} (r(a_{ik} + b_{ik})) \stackrel{(3)}{=} (ra_{ik} + rb_{ik}) \stackrel{(4)}{=} (ra_{ik}) + (rb_{ik}) \\ &\stackrel{(5)}{=} r(a_{ik}) + r(b_{ik}) = rA + rB \end{aligned}$$

- (1) Definition der Matrizenaddition
- (2) Definition der skalaren Multiplikation
- (3) Distributivgesetz in $\mathbb{R}$
- (4) Definition der Matrizenaddition
- (5) Definition der skalaren Multiplikation

Wir wollen jetzt erklären, wie wir Matrizen passenden Formats miteinander multiplizieren können. Bisher haben wir nur das Produkt aus einer $(m \times n)$ -Matrix und einem n -Tupel definiert (s. (2.4)). Das Ergebnis ist dabei ein m -Tupel. Wir werden dies für die Definition der Matrizenmultiplikation benutzen.

Wir betrachten zunächst ein konkretes Beispiel. Seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$$

Dann ist die Matrix B aufgebaut aus den vier 3-Tupeln $a := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $d := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Jede dieser Spalten läßt sich mit der Matrix A im Sinne der Definition (2.4)

multiplizieren, das Ergebnis ist jeweils ein 2-Tupel. Wir erhalten also vier 2-Tupel $Aa = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Ab = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $Ac = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Ad = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$. Die Produktmatrix $A \cdot B$ wird jetzt als diejenige (2×4) -Matrix definiert, deren Spalten gerade die Vektoren Aa, Ab, Ac, Ad sind, d.h.

$$A \cdot B := (Aa \ Ab \ Ac \ Ad) = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 12 & 10 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{R})$$

Es ist klar, daß diese Bildung nur funktionieren kann, wenn die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt.

Wir können die Elemente der rechtsstehenden Matrix auch noch auf einem anderen Wege erhalten: Um etwa das Element an der Stelle $(2, 3)$ zu berechnen, müssen wir die zweite Zeile von A mit der dritten Spalte von B multiplizieren, d.h. wir müssen das Element der (1×1) -Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = (2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2) = (2)$$

berechnen. Damit kommen wir zu der folgenden Definition:

(4.7) DEF: Das Produkt $A \cdot B$ aus einer $(m \times n)$ -Matrix $A = (a_{ik})$ und einer $(n \times p)$ -Matrix $B = (b_{kl})$ ist definiert als die $(m \times p)$ -Matrix $C = (c_{il})$, deren Element c_{il} das Produkt aus der i -ten Zeile von A und der l -ten Spalte von B ist.

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 10 & 14 \\ 19 & 28 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \\ v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r + 3t + 4v & 2s + 3u + 4w \\ 5r + 6t + 7v & 5s + 6u + 7w \end{pmatrix}$$

(4.8) BEM: a) Die Matrix $A = (a_{ik})$ hat $(a_{i1} \ a_{i2} \ a_{i3} \ \dots \ a_{in})$ als i -te Zeile, und Die Matrix

$B = (b_{kl})$ hat $\begin{pmatrix} b_{1l} \\ b_{2l} \\ b_{3l} \\ \vdots \\ b_{nl} \end{pmatrix}$ als l -te Spalte. Das Produkt ergibt

$$c_{il} = a_{i1}b_{1l} + a_{i2}b_{2l} + a_{i3}b_{3l} + \dots + a_{in}b_{nl}$$

b) **Achtung:** Es lassen sich nur Matrizen passenden Formats multiplizieren, d.h. die Spaltenzahl des ersten Faktors muß gleich der Zeilenzahl des zweiten Faktors sein.

c) Die Matrizenmultiplikation ordnet einer $(m \times n)$ -Matrix A und einer $(n \times p)$ -Matrix B eine $(m \times p)$ -Matrix $A \cdot B$ zu.

(4.9) DEF: Die quadratische Matrix $E_n = (e_{ik}) \in M_n(\mathbb{R})$ mit den Elementen

$$e_{ik} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}$$

heißt n -reihige Einheitsmatrix.

Bei einer Einheitsmatrix steht 1 in der Hauptdiagonale und 0 sonst.

Beispiel: $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(4.10) SATZ: Rechenregeln für die Matrizenmultiplikation

Für Matrizen A, B, C passenden Formats gilt:

a) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (Assoziatives Gesetz)

b) I.a. ist $A \cdot B \neq B \cdot A$

c) Im Falle $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ gilt $E_m \cdot A = A$ und $A \cdot E_n = A$.

d) Ist A oder B eine Nullmatrix, so ist $A \cdot B$ ebenfalls eine Nullmatrix.

e) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$ und $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$

(Distributive Gesetze)

Bew: a) Wir beweisen das Assoziativgesetz exemplarisch an Hand von (2×2) -Matrizen. Der allgemeine Beweis verläuft analog, ist allerdings mit etwas mehr Schreibarbeit verbunden!

Seien $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$, $C = (c_{ik}) \in M_2(\mathbb{R})$. Wir berechnen $(A \cdot B) \cdot C$ und $A \cdot (B \cdot C)$ und stellen die Gleichheit der beiden Ergebnisse fest. Aus schreibtechnischen Gründen sind die Elemente $\star$ nicht mehr explizit ausgerechnet.

$$\begin{aligned}
 (A \cdot B) \cdot C &= \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{11} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{21} & \star \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{11} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{21} & \star \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \textcolor{red}{a_{11}b_{11}c_{11}} + \textcolor{red}{a_{12}b_{21}c_{11}} + \textcolor{red}{a_{11}b_{12}c_{21}} + \textcolor{red}{a_{12}b_{22}c_{21}} & \textcolor{green}{\star} \\ \textcolor{blue}{a_{21}b_{11}c_{11}} + \textcolor{blue}{a_{22}b_{21}c_{11}} + \textcolor{blue}{a_{21}b_{12}c_{21}} + \textcolor{blue}{a_{22}b_{22}c_{21}} & \star \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A \cdot (B \cdot C) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \right) \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{12}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) & \star \\ a_{21}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{22}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) & \star \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \textcolor{red}{a_{11}b_{11}c_{11}} + \textcolor{red}{a_{11}b_{12}c_{21}} + \textcolor{red}{a_{12}b_{21}c_{11}} + \textcolor{red}{a_{12}b_{22}c_{21}} & \textcolor{green}{\star} \\ \textcolor{blue}{a_{21}b_{11}c_{11}} + \textcolor{blue}{a_{21}b_{12}c_{21}} + \textcolor{blue}{a_{22}b_{21}c_{11}} + \textcolor{blue}{a_{22}b_{22}c_{21}} & \star \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Man stellt fest, daß die Elemente der beiden Produkte an den Positionen $(1, 1)$ bzw. $(2, 1)$ übereinstimmen. Dasselbe gilt auch für die nicht angegebenen Elemente an den Positionen $(1, 2)$ bzw. $(2, 2)$. Wir können also $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ schließen.

b) Wir geben ein konkretes Beispiel an: Für $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ gilt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \textcolor{red}{0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \textcolor{red}{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Folglich $A \cdot B \neq B \cdot A$.

(4.11) SATZ: Für quadratische Matrizen $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ gilt:

- a) $A \cdot B \in M_n(\mathbb{R})$
- b) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- c) I.a. ist $A \cdot B \neq B \cdot A$
- d) $E_n \cdot A = A = A \cdot E_n$
- e) Ist $O_n \in M_n(\mathbb{R})$ die Nullmatrix, so gilt $A \cdot O_n = O_n = O_n \cdot A$
- e) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$ und $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$

(4.12) DEF: Seien $k \in \mathbb{N}_0$ und $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dann ist die k -te Potenz A^k von A rekursiv definiert durch

$$A^k := \begin{cases} E_n & \text{für } k = 0 \\ A^{k-1} \cdot A & \text{für } k > 0 \end{cases}$$

(4.13) BEM: a) Es gilt die Potenzregel $A^k \cdot A^l = A^{k+l}$ ($k, l \in \mathbb{N}_0$).

b) I.a. ist $(A \cdot B)^k \neq A^k \cdot B^k$.

(4.14) BEM: Für die Matrizenmultiplikation gelten viele der Rechenregeln, die wir von der Multiplikation reeller Zahlen kennen, **nicht** mehr. Daher ist **Vorsicht** geboten! Einige Beispiele:

- a) Es kann $A \cdot B \neq B \cdot A$ sein
- b) Es kann $A \cdot B = O$ sein, ohne daß $A = O$ oder $B = O$ ist
- c) Aus $A \cdot B = A \cdot C$ folgt nicht notwendig $B = C$
- d) Aus $A \cdot C = B \cdot C$ folgt nicht notwendig $A = B$
- e) Es kann $A^2 = A$ gelten für $A \notin \{O_n, E_n\}$
- f) Es kann $A^2 = O_n$ gelten, ohne daß $A = O_n$ ist
- g) Es kann $(A \cdot B)^2 \neq A^2 \cdot B^2$ sein.