§10: Lineare Abbildungen

(10.1) BEISPIEL: Die Vektorräume V_2 und $\mathbb{R}^2$ haben "diegleiche Struktur" .
Es gibt eine bijektive Abbildung $f : V_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die durch die Vorschrift

$$f(\vec{v}) := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

definiert ist, wobei $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ das Koordinaten–Tupel des Endpunktes der Vektors $\vec{v} \in V_2$ ist.

f ist bijektiv, da jedes Tupel $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ genau ein Urbild unter f besitzt.

Diese Abbildung ist "verträglich" mit den Vektorraumstrukturen von V_2 und $\mathbb{R}^2$ in dem folgenden Sinne:

Wenn wir zwei Vektoren in V_2 addieren, so addieren sich nach Aufg. 3 die Koordinaten ihrer Endpunkte: Haben zwei beliebige Vektoren $\vec{v}, \vec{v'} \in V_2$ die Bilder $f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $f(\vec{v'}) = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$, so folgt

$$f(\vec{v} + \vec{v'}) \;=\; \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \;=\; f(\vec{v}) + f(\vec{v'})$$

Außerdem gilt für $r \in \mathbb{R}$ (wie in den Übungen bewiesen)

$$f(r\vec{v}) \;=\; \begin{pmatrix} ra \\ rb \end{pmatrix} \;=\; r\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \;=\; rf(\vec{v}) \,.$$

Wir nehmen diese Ergebnisse zum Anlaß für die folgende Definition:

(10.2) DEF: V und W seien zwei Vektorräume, und $f : V \longrightarrow W$ sei eine Abbildung.

a) f heißt **linear**, wenn gilt:

LA_1) $f(v + v') = f(v) + f(v')$ für alle $v, v' \in V$

LA_2) $f(rv) = rf(v)$ für alle $r \in \mathbb{R}$ und alle $v \in V$.

b) f heißt ein **(Vektorraum–)Isomorphismus**, wenn f linear und bijektiv ist.

c) V heißt **isomorph zu W**, in Zeichen $V \cong W$, wenn es einen Isomorphismus $V \longrightarrow W$ gibt.

(10.3) BEISPIELE: a) Die Abbildung $f : V_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ aus (10.1) ist linear und bijektiv, also ein Isomorphismus.

b) Die Abbildung $g : V_3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ordne analog zu a) jedem Vektor $\vec{v}$ des Raumes das Koordinaten–Tripel seines Endpunktes zu. Dann ist g auch ein Isomorphismus.

c) Die Abbildung $tr : \mathsf{M}_{3,4}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathsf{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ definiert durch $tr(A) := {}^tA \in \mathsf{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ ist ein Isomorphismus.

d) Sei $\nabla_3(\mathbb{R}) \subseteq \mathsf{M}_3(\mathbb{R})$ die Menge aller oberen (3×3)–Dreiecksmatrizen. Dann ist die Abbildung

$$h : \nabla_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad A = (a_{ik}) \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

linear.

(10.4) SATZ: Jede Matrix $A \in \mathsf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ definiert eine lineare Abbildung

$$f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

durch die Zuordnungsvorschrift $f_A(v) = A \cdot v$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

(10.5) BEM: Es gilt auch die Umkehrung des Satzes (10.4), die wir hier nicht mehr beweisen können:

a) Zu jeder linearen Abbildung $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ gibt es eine eindeutig bestimmte Matrix $A \in \mathsf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft $g = f_A$.

b) $f_A = f_B \implies A = B$ für alle $A, B \in \mathsf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

Damit sind die linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vollständig durch die $(m \times n)$–Matrizen bestimmt.

c) $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \implies f_A \circ f_B = f_{A \cdot B}$

(10.6) BEM: Seien $A \in \mathsf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$\text{Lös}(A, b) = \{c \mid c \in \mathbb{R}^n , \, f_A(c) = b\} ,$$

d.h. die Lösungen des LGS's $Ax = b$ sind genau die n–Tupel c, für die $f_A(c) = b$ gilt.

(10.7) SATZ: $f : V \longrightarrow W$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt:

a) $f(o_V) = o_W$

b) $f(-v) = -f(v)$ für alle $v \in V$

c) $f(v) = f(w) \iff f(v - w) = o_W$

d) $f(r_1v_1 + r_2v_2) = r_1f(v_1) + r_2f(v_2)$ für alle $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ und $v_1, v_2 \in V$

e) $f(r_1v_1 + \ldots + r_nv_n) = r_1f(v_1) + \ldots + r_nf(v_n)$ für alle $r_k \in \mathbb{R}$ und $v_k \in V$ $(k = 1, 2, \ldots , n)$.

(10.8) SATZ: $f : V \longrightarrow W$ sei ein Isomorphismus. Ist dann $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V, so ist

$$f(B) := \{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$$

eine Basis von W.

Bew: **i)** $f(B)$ ist linear unabhängig.

Seien $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ und gelte

$$r_1 f(v_1) + r_2 f(v_2) + \ldots + r_n f(v_n) = o_W \, .$$

Wir wollen zeigen, daß alle Koeffizienten 0 sind. Es folgt mit (10.7a)

$$\begin{aligned} \underline{f(o_V)} = o_W &= r_1 f(v_1) + r_2 f(v_2) + \ldots + r_n f(v_n) \\ &\overset{\text{LA}_2)}{=} f(r_1 v_1) + f(r_2 v_2) + \ldots + f(r_n v_n) \\ &\overset{\text{LA}_1)}{=} \underline{f(r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n)} \end{aligned}$$

Da f bijektiv ist, folgt mit (E.07) i)

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n = o_V \, .$$

Nach Voraussetzung ist aber B insbesondere linear unabhängig, so daß in dieser LK alle Koeffizienten $r_1, r_2, \ldots, r_n$ Null sein müssen, was wir auch zu zeigen hatten.

ii) $f(B)$ ist ein EZS von W.

Z.z.: Jeder Vektor $w \in W$ läßt sich als LK der Vektoren aus $f(B)$ darstellen.

Nach (E.07) ii) gibt es zu $w \in W$ ein $v \in V$ mit

$$w = f(v) \, .$$

Der Vektor v läßt sich als LK der Vektoren aus B darstellen, da B ein EZS von V ist. Sei also

$$v = r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n \, .$$

Dann folgt mit (10.7e)

$$w = f(v) = f(r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n) = r_1 f(v_1) + r_2 f(v_2) + \ldots + r_n f(v_n) \, ,$$

d.h. w läßt sich als LK der Vektoren aus $f(B)$ darstellen.

Insgesamt ist $f(B)$ eine Basis von W.

(10.9) FOLG: V und W seien (endlichdimensionale) Vektorräume. Dann gilt

$$V \cong W \quad \Longrightarrow \quad \dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(W) \, .$$

Bew: Sei $\dim_{\mathbb{R}}(V) = m$. Dann gibt es eine Basis $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ von V aus m Vektoren. Nach Voraussetzung existiert ein Isomorphismus $f : V \longrightarrow W$. Nach (10.8) ist dann $f(B)$ eine Basis von W. Da f bijektiv ist, gilt

$$|f(B)| \;=\; |B| \;=\; m\,,$$

so daß also auch W eine Basis aus m Vektoren besitzt. Folglich $\dim_{\mathbb{R}}(W) = m$ und damit

$$\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(W)\,.$$

Wir wollen nun noch die Umkehrung von (10.9) beweisen.

(10.10) SATZ: V und W seien (endlichdimensionale) Vektorräume. Dann gilt

$$\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(W) \quad\Longrightarrow\quad V \cong W\,.$$

Bew: Nach Voraussetzung existieren Basen $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ von V und $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ von W mit jeweils genau m Vektoren.
Wir wollen eine Abbildung $f : V \longrightarrow W$ definieren:
Jeder Vektor $v \in V$ läßt sich als LK

$$v \;=\; r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_m v_m$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $r_k \in \mathbb{R}$ darstellen. Wir setzen

$$f(v) :=\; r_1 w_1 + r_2 w_2 + \ldots + r_m w_m\,.$$

Dann ist $f(v)$ eindeutig durch v bestimmt, so daß die Zuordnung $v \longmapsto f(v)$ eine Abbildung $f : V \longrightarrow W$ definiert, von der sich zeigen läßt, daß sie ein Isomorphismus ist (s. Beweis–Anhang).

(10.11) BEM: Faßt man die Ergebnisse (10.9) und (10.10) zusammen, so gilt:
Zwei Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn sie die gleiche Dimension haben.

(10.12) FOLG: Jeder m–dimensionale Vektorraum ist isomorph zu $\mathbb{R}^m$.

(10.13) BEISPIELE: Aus Dimensionsgründen gilt:

a) $V_2 \;\cong\; \mathbb{R}^2$

b) $V_3 \;\cong\; \mathbb{R}^3$

c) $\mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \;\cong\; \mathbb{R}^6$

d) $D_n(\mathbb{R}) \;\cong\; \mathbb{R}^n$ ($D_n(\mathbb{R})$ bezeichnet den Vektorraum der Diagonalmatrizen in $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$)

(10.14) SATZ: Für eine Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\boldsymbol{A}$ ist invertierbar

b) die Abbildung $\boldsymbol{f_A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist ein Isomorphismus.

Bew: s. Beweis–Anhang

Zum Abschluß kommen wir noch einmal zu LGS'en zurück und können jetzt auch die Umkehrung von (5.5) beweisen :

(10.15) FOLG: Für eine Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\boldsymbol{A}$ ist invertierbar

b) für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ ist das LGS $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ eindeutig lösbar.

Bew: a) $\Longrightarrow$ b)

Dies haben wir schon in (5.5) bewiesen.

b) $\Longrightarrow$ a)

Wir zeigen mit (E.07) , daß die lineare Abbildung $\boldsymbol{f_A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bijektiv und damit ein Isomorphismus ist.

i) Seien $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v'} \in \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{f_A}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f_A}(\boldsymbol{v'})$. Z.z. $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v'}$.

Es folgt $\boldsymbol{Av} = \boldsymbol{Av'}$ und daraus mit Aufgabe 14e) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v'}) = \boldsymbol{Av} - \boldsymbol{Av'} = \boldsymbol{o_n}$. Also ist $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v'}$ eine Lösung des homogenen LGS's $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{o_n}$, das nach Voraussetzung nur eine einzige Lösung besitzt. Da auch $\boldsymbol{o_n}$ eine Lösung dieses LGS's ist, ergibt sich $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v'} = \boldsymbol{o_n}$, woraus $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v'}$ folgt.

ii) Sei $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Z.z.: es gibt ein $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $\boldsymbol{f_A}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{b}$.

Das LGS $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ist nach Voraussetzung lösbar, d.h. es gibt ein $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Av} = \boldsymbol{f_A}(\boldsymbol{v})$. Also ist $\boldsymbol{f_A}$ ein Isomorphismus.

Nach (10.14) ist die Matrix $\boldsymbol{A}$ invertierbar.

Beweis–Anhang

Beweis von (10.10)

1) f ist linear

LA$_1$) Z.z. $f(v+v') = f(v) + f(v')$ $(v, v' \in V)$

Seien $v = r_1 v_1 + \ldots + r_m v_m$ und $v' = r'_1 v_1 + \ldots + r'_m v_m$. Aus

$$v + v' = (r_1 v_1 + \ldots + r_m v_m) + (r'_1 v_1 + \ldots + r'_m v_m) = (r_1 + r'_1) v_1 + \ldots + (r_m + r'_m) v_m$$

ergibt sich dann nach Definition von f

$$\begin{aligned} \underline{f(v+v')} &= (r_1 + r'_1) w_1 + \ldots + (r_m + r'_m) w_m \\ &= (r_1 w_1 + \ldots + r_m w_m) + (r'_1 w_1 + \ldots + r'_m w_m) \\ &= \underline{f(v) + f(v')} \,. \end{aligned}$$

LA$_2$) Z.z. $f(rv) = r f(v)$ $(r \in \mathbb{R}, v \in V)$

Für $v = r_1 v_1 + \ldots + r_m v_m$ gilt

$$rv = r(r_1 v_1 + \ldots + r_m v_m) = (r r_1) v_1 + \ldots + (r r_m) v_m \,.$$

Nach Definition von f ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} \underline{f(rv)} &= (r r_1) w_1 + \ldots + (r r_m) w_m = r(r_1 w_1) + \ldots r(r_m w_m) \\ &= r(r_1 w_1 + \ldots + r_m w_m) = \underline{r f(v)} \,. \end{aligned}$$

2) f ist bijektiv

Hierffür weisen wir die beiden Bedingungen aus (E.07) nach:

i) Z.z. $v, v' \in V \,:\, f(v) = f(v') \implies v = v'$

Aus $f(v) = f(v')$ folgt mit den obigen Darstellungen von v und v' auf Grund der Definition von f

$$r_1 w_1 + \ldots + r_m w_m = r'_1 w_1 + \ldots + r'_m w_m \,.$$

Da die Darstellung eines Vektors als LK von Vektoren aus der Basis $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ nach (9.2) eindeutig ist, folgt hieraus

$$r_k = r'_k \text{ für alle } k = 1, 2, \ldots, m \,,$$

was

$$\underline{\underline{v}} = r_1 v_1 + \ldots + r_m v_m = r'_1 v_1 + \ldots + r'_m v_m = \underline{\underline{v'}} \,.$$

zur Folge hat.

2) Z.z. Zu jedem $w \in W$ gibt es ein $v \in V$ mit $w = f(v)$.

Da $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von W ist, läßt sich der Vektor $w \in W$ darstellen in der Form

$$w = r_1 w_1 + \ldots + r_m w_m \,.$$

Bilde mit diesen Koeffizienten r_k den Vektor

$$v = r_1 v_1 + \ldots + r_m v_m \in V \,.$$

Dann folgt auf Grund der Definition von f

$$\underline{\underline{f(v)}} = r_1 w_1 + \ldots + r_m w_m = \underline{\underline{w}}\,.$$

Damit ist der Beweis beendet.

Beweis von (10.14)

a) $\Longrightarrow$ b)

Die durch $v \longmapsto Av$ definierte Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist nach (10.4) linear. Um die Bijektivität von f_A zu beweisen, zeigen wir, daß die beiden Bedingungen i) und ii) aus (E.07) erfüllt sind.

i) Seien $v, v' \in \mathbb{R}^n$ mit $f_A(v) = f_A(v')$. Z.z. $v = v'$.

Es gilt also $Av = Av'$. Multiplizieren wir diese Gleichung von links mit A^{-1}, so ergibt sich unter Verwendung bekannter Rechenregeln die Behauptung $v = v'$.

ii) Sei $w \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Z.z.: es gibt ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $f_A(v) = w$.

Setze $v := A^{-1} \cdot w \in \mathbb{R}^n$. Dann folgt:

$$f_A(v) = Av = A(A^{-1}w) = (AA^{-1})w = E_n w = w\,.$$

Also ist f_A bijektiv und linear, insgesamt also ein Isomorphismus.

b) $\Longrightarrow$ a)

Da f_A nach Voraussetzung bijektiv ist, gibt es nach (E.09) eine Umkehrabbildung $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$g \circ f_A = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = f_A \circ g\,.$$

Man kann nun einfach zeigen, daß die Umkehrabbildung eines Isomorphismus insbesondere linear ist (das ist eine leichte Übungsaufgabe!), so daß es nach (10.5a) eine Matrix $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ gibt mit

$$g = f_B\,.$$

Also folgt

$$f_B \circ f_A = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = f_A \circ f_B\,,$$

woraus sich mit (10.5c) und der offensichtlichen Beziehung $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = f_{E_n}$

$$f_{A \cdot B} = f_{E_n} = f_{B \cdot A}$$

ergibt. Mit (10.5b) können wir

$$A \cdot B = E_n = B \cdot A$$

schließen, so daß A invertierbar ist.