E: Einschub über Abbildungen

(E.01) DEF: M und N seien Mengen. Eine **Abbildung** (oder **Funktion**) $f : M \longrightarrow N$ ordnet jedem Element aus M in eindeutiger Weise ein Element aus N zu.

(E.02) Bezeichnungsen:

a) Ist $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung, so heißt M der **Definitionsbereich von** f und N der **Wertebereich von** f.

b) Ist $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung und wird einem Element $x \in M$ das Element $y \in N$ durch f zugeordnet, so heißt y der **Bildwert** (oder kurz das **Bild**) **von** x **unter** f. Bezeichnung: $y = f(x)$.

c) Durch $x \longmapsto f(x)$ wird die **Zuordnungsvorschrift** bezeichnet.

d) Ist $y \in N$, so heißt jedes Element $x \in M$ mit $y = f(x)$ ein **Urbild von** y **unter** f.

(E.03) BEISPIELE: a) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\ ,\ z \longmapsto z + 1$

b) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto x^2 + 1$

c) $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x + y$

d) $\mathrm{id}_M : M \longrightarrow M\ ,\ x \longmapsto x$ ist die **identische Abbildung** auf einer Menge M.

(E.04) DEF: $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ seien Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

$$g \circ f : M \longrightarrow P\,,$$

die durch die Zuordnungsvorschrift

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \text{ für alle } x \in M$$

definiert ist, die **Hintereinanderausführung** (oder **Verkettung** oder **Verknüpfung**) **von** f **und** g.

(E.05) DEF: Eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ heißt **bijektiv**, wenn jedes Element aus N genau ein Urbild unter f besitzt.

(E.06) BEISPIELE: a) Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\ ,\ z \longmapsto z + 1$ ist bijektiv.

b) Die Abbildung $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto x^2 + 1$ ist nicht bijektiv, da 0 kein Urbild unter g besitzt oder da 2 zwei Urbilder (nämlich 1 und -1) besitzt.

c) Die Abbildung h aus (E.03c) ist nicht bijektiv, da jedes $y \in \mathbb{R}$ unendlich viele Urbilder unter h besitzt.

d) Eine identische Abbildung ist immer bijektiv.

(E.07) BEM: Eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ ist genau dann bijektiv, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

i) Jedes Element aus N besitzt höchstens ein Urbild, d.h.

für alle $x, x' \in M$ gilt: $f(x) = f(x') \implies x = x'$

ii) Jedes Element aus N besitzt mindestens ein Urbild, d.h.

zu jedem $y \in N$ gibt es (mindestens) ein $x \in M$ mit $y = f(x)$.

(E.08) BEM: **a)** Eine Abbildung, die die Bedingung i) erfüllt, wird auch als **injektiv** bezeichnet.

b) Eine Abbildung, die die Bedingung ii) erfüllt, wird auch als **surjektiv** bezeichnet.

c) Eine Abbildung ist also genau dann bijektiv, wenn sie injektiv **und** surjektiv ist.

(E.09) SATZ: Ist die Abbildung $f : M \longrightarrow N$ bijektiv, so gibt es eine Abbildung $g : N \longrightarrow M$, die für $y \in N$ durch die Vorschrift

$$g(y) = x \iff f(x) = y \quad (x \in M)$$

definiert ist. Ferner gilt

$$g \circ f = \mathrm{id}_M \ \text{ und } \ f \circ g = \mathrm{id}_N .$$

(E.10) BEM: Ist die Abbildung $f : M \longrightarrow N$ bijektiv, so gibt es genau eine Abbildung $g : N \longrightarrow M$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$. Diese Abbildung g heißt die **Umkehrabbildung von** f und wird mit f^{-1} bezeichnet. Es gilt dann also

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M \ \text{ und } \ f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N .$$

(E.11) BEISPIEL: Die Umkehrabbildung von $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $z \longmapsto z + 1$ ist die Abbildung $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, die durch die Vorschrift $g(z) := z - 1$ definiert ist.

(E.12) SATZ: **a)** Ist $f : M \longrightarrow N$ eine bijektive Abbildung, so ist auch dei Umkehrabbildung $f^{-1} : N \longrightarrow M$ bijektiv, und es gilt

$$(f^{-1})^{-1} = f .$$

b) Sind $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ bijektive Abbildungen, so ist auch $g \circ f : M \longrightarrow P$ bijektiv, und es gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} .$$

(E.13) SATZ: Sind M und N endliche Mengen und ist $f : M \longrightarrow N$ eine bijektive Abbildung, so haben M und N gleichviel Elemente, d.h. $|M| = |N|$.

(E.14) BEISPIEL: Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller Abbildungen (Funktionen) von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, d.h.

$$\mathcal{A} = \{f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ Abbildung}\}.$$

Auf dieser Menge definieren wir eine Addition und eine skalare Multiplikation durch folgende Vorschriften:

Für zwei Abildungen $f, g \in \mathcal{A}$ wird die Summe $f\#g$ definiert als die Abbildung $f\#g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift

$$(f\#g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Für $r \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{A}$ wird das skalare Vielfache $r \star f$ definiert als die Abbildung $r \star f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift

$$(r \star f)(x) := r \cdot f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beachte hierbei, daß $f\#g$ und $r \star f$ wieder Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sind!

Es läßt sich zeigen, daß

$$(\mathcal{A}, \#, \star)$$

ein Vektorraum ist, indem man die Vektorraum–Bedingungen aus (8.1) nachprüft.

Dieser Vektorraum hat eine Eigenschaft, die bei unseren bisher betrachteten Beispielen nicht aufgetreten ist: $\mathcal{A}$ besitzt nämlich keine endliche Basis. Man nennt daher $\mathcal{A}$ einen unendlichdimensionalen Vektorraum.