(47) Sei $B := \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{=v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{=v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{=v_3} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$

Setze $\mathcal{U} := \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(B)$.

Dann ist $\mathcal{U}$ ein UVR von $\mathbb{R}^4$ (8.6b), und $B$ ist ein EZS von $\mathcal{U}$ $\boxed{1}$

Beh: $B$ ist lin. unabh.

Seien $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ mit $r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3 = 0_4$. zz: $r_1 = r_2 = r_3 = 0$.

Es folgt

$$\begin{pmatrix} r_1 + r_2 + r_3 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow r_1 = r_2 = r_3 = 0.$$

Damit ist <u>$B$ eine Basis von $\mathcal{U}$</u>, und es gilt $\underline{\underline{\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{U}) = |B| = 3}}$ $\boxed{1}$

Seien $e_1, e_2, e_3, e_4$ die Einheitsvektoren aus $\mathbb{R}^4$. zz: $e_k \notin \mathcal{U}$ für $k = 1,2,3,4$.

Annahme: $e_1 \in \mathcal{U}$. Dann läßt sich $e_1$ als LK von $v_1, v_2, v_3$ darstellen, d.h. es gibt $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$e_1 = s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_3 v_3 = \begin{pmatrix} s_1 + s_2 + s_3 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow s_1 = s_2 = s_3 = 0$$

$$1 = s_1 + s_2 + s_3 = 0 \; \lightning.$$

Also $e_1 \notin \mathcal{U}$

Annahme: $e_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow$ es gibt $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} s_1 + s_2 + s_3 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 0$$

$$0 = s_1 + s_2 + s_3 = 1 \; \lightning$$

Also $e_2 \notin \mathcal{U}$.

Analog $e_3 \notin \mathcal{U}$, $e_4 \notin \mathcal{U}$. $\boxed{1}$

---

(48) $\dim_{\mathbb{R}}(V) = m$.

Annahme: es gibt ein EZS $T$ von $V$ mit weniger als $m$ Elementen, d.h. $|T| < m$.

Nach (9.9) gibt es dann eine Basis $B$ von $V$ mit $B \subseteq T$.

Nach (9.13) hat $B$ genau $m = \dim_{\mathbb{R}}(V)$ Elemente, d.h.

$$m = |B| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wegen } B \subseteq T}}{\leq} |T| < m \quad \lightning.$$

$\boxed{2}$