

④ a) Nachweis der Eigenschaften aus Def. (9.5)

U_1) Die Nullmatrix $O_3 \in M_3(\mathbb{R})$ ist eine obere Dreiecksmatrix, d.h. $O_3 \in D_3(\mathbb{R})$

U_2) Seien $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \in D_3(\mathbb{R})$

zz: $A+B \in D_3(\mathbb{R})$

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ 0 & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix} \in D_3(\mathbb{R})$$

U_3) Seien $\tau \in \mathbb{R}$, $A \in D_3(\mathbb{R})$. zz: $\tau A \in D_3(\mathbb{R})$

$$\tau A = \begin{pmatrix} \tau a_{11} & \tau a_{12} & \tau a_{13} \\ 0 & \tau a_{22} & \tau a_{23} \\ 0 & 0 & \tau a_{33} \end{pmatrix} \in D_3(\mathbb{R})$$

1

b) $B = \{E_{i,k} \mid i,k=1,2,3\}$ ist eine Basis von $M_3(\mathbb{R})$

Sei $B' := \{E_{i,k} \mid i \leq k\}$

Beh: B' ist eine Basis von $D_3(\mathbb{R})$

① $B' \subseteq D_3(\mathbb{R})$ (alle Elemente aus B' sind obere Dreiecksmatrizen)

② B' ist linear unabhängig als Teilmenge der linear unabhängigen Menge B (s. Aufg. 43b)

③ B' ist ein EZS von $D_3(\mathbb{R})$

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \in D_3(\mathbb{R})$ bel. $\Rightarrow$

$$a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{13}E_{13} + a_{22}E_{22} + a_{23}E_{23} + a_{33}E_{33} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = A$$

d.h. A ist LK der Elemente aus B' (ist die Dimension)
Also ist B' eine Basis von $D_3(\mathbb{R})$ und die Anzahl der Elemente von B'

Es folgt $\dim_{\mathbb{R}}(D_3(\mathbb{R})) = |B'| = 6$

1 1/2