5. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA (SS 2008)

Abgabe: Fr. 16.5.2008, bis 9.15 Uhr

Gruppe 1 (Mo): Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Gruppe 2 (Do): Fach Nr. 11 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es können **Bonuspunkte** für die Übungsschein–Klausur erworben werden.

Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

Begründen Sie bitte Ihren Lösungsweg bzw. erklären Sie Ihren Rechenweg!

Allgemeiner Hinweis: Lineare Gleichungssysteme **müssen** ab jetzt mit dem Gauß-Algorithmus gelöst werden. Die vorgenommenen Umformungen der Gleichungen sollen so wie in der Vorlesung **kenntlich** gemacht werden. Benutze **keinen** Taschenrechner. Es soll mit weitgehend vereinfachten Brüchen gerechnet werden.

14. Aufgabe: Seien $a := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$, $c := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ und $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,4}(\mathbb{R})$. Beweise:

a) $(a+b)+c = a+(b+c)$ **b)** $a+(-a) = o_4$ **c)** $A(-a) = -(Aa)$

d) $A(a+b) = (Aa)+(Ab)$ **e)** Leite direkt aus c) und d) her: $A(a-b) = (Aa)-(Ab)$

f) $(rs)a = r(sa)$ für alle $r, s \in \mathbb{R}$ **g)** $A(ra) = r(Aa)$ für alle $r \in \mathbb{R}$.

Mache Dir dabei immer klar, welche in $\mathbb{R}$ gültigen Rechenregeln benutzt werden! (6)

15. Aufgabe: a) Löse das LGS

$$(\star) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & = & -1 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & -2 \end{array} \right.$$

mit dem Gauß –Algorithmus (ohne Vertauschungen!) . Evtl. vorkommende Parameter sollen mit $x_5 = t$, $x_4 = s$, $x_3 = r$ usw. bezeichnet werden. Gib die Lösungsmenge $\mathbb{L} := \text{Lös}(A, b)$ an (hierbei bezeichne A die Koeffizientenmatrix von $(\star)$ und b den Vektor der rechten Seite von $(\star)$) . Vergiss die Probe nicht!

weiter nächste Seite

b) Neufassung s.u. Durch Einsetzen spezieller Werte für die Parameter der allgemeinen Lösung von $Ax = b$ erhält man die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^5$: a (für $r = s = t = 0$), c (für $r = 1, s = t = 0$), d (für $s = 1, r = t = 0$) und e (für $r = s = 0, t = 1$). Zeige, daß sich die allgemeine Lösung von $(\star)$ als Linearkombination

$$a + rc + sd + te$$

darstellen läßt. Welche Bedeutung haben a, c, d, e? Begründe die Antwort.

c) Lies aus dem Ergebnis von a) die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen LGS's $Ax = o_3$ ab. Mache auch hierfür die Probe!

(5)

16. Aufgabe: a) Untersuche, ob sich jeder Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination der beiden Vektoren $c := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $d := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^2$ darstellen läßt. Die Antwort ist natürlich zu begründen. **Hinweis:** Diese Aufgabe hat etwas mit linearen Gleichungssystemen zu tun!

b) Diegleiche Aufgabe wie in a), allerdings jetzt mit $c := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $d := \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^2$.

(3)

Wenn Sie einen der Korrektoren sprechen wollen, schicken Sie ihm bitte eine email:

Marcus Becker (Kürzel: M.B.): marcusbe@mail.upb.de

Andreas Kottmann (Kürzel: A.K.): kottmann@upb.de

Wir wünschen ein schönes Pfingstfest!

Korrektur Aufgabe 15b:

b) Durch Einsetzen von $r = s = t = 0$ in die berechnete allgemeine Lösung y von $(\star)$ erhält man eine spezielle Lösung $a \in \mathbb{R}^5$ von $(\star)$. Setzt man in $y - a$ (!!!) spezielle Werte für die Parameter ein, so erhält man die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^5$: c (für $r = 1, s = t = 0$), d (für $s = 1, r = t = 0$) und e (für $r = s = 0, t = 1$). Zeige, daß sich die allgemeine Lösung von $(\star)$ als Linearkombination

$$a + rc + sd + te$$

darstellen läßt. Welche Bedeutung haben c, d, e? Begründe die Antwort.