Hallo!

Einmal ganz ehrlich: Haben Sie wirklich versucht, diese Aufgaben selbständig zu bearbeiten?

Wenn ja, können Sie sich die Musterlösungen auf den nächsten Seiten ansehen, wenn nicht, sollten Sie sich zuerst selbständig mit den Aufgaben auseinandersetzen!

15. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA (SS 2008)

Musterlösung

49. Aufgabe: Es ist zu beweisen, daß C **1)** linear unabhängig und **2)** ein EZS von V ist.

1) Z.z: Für alle $r_1, r_2, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$ mit $r_1(s_1v_1) + r_2(s_2v_2) + \ldots + r_m(s_mv_m) = o_V$ folgt $r_1 = r_2 = \ldots = r_m = 0$.

Mit $\mathbf{SM_3}$) ergibt sich $(r_1s_1)v_1 + (r_2s_2)v_2 + \ldots + (r_ms_m)v_m = o_V$. Da B nach Voraussetzung linear unabhängig ist, müssen alle Koeffizienten 0 sein, d.h.

$$r_is_i = 0 \quad \text{für alle } i = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Hieraus folgt aber $r_i = 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots, m$, da $s_i \neq 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots, m$ nach Voraussetzung.

2) Z.z: Jeder Vektor $v \in V$ läßt sich als LK der Vektoren aus C darstellen.

Da B ein EZS von V ist, läßt sich v als LK der Vektoren aus B darstellen, d.h. es gibt Skalare $r_1, r_2, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$ mit

$$v = r_1v_1 + r_2v_2 + \ldots + r_mv_m\,.$$

Auf Grund der Rechenregeln für die skalare Multiplikation und der Voraussetzung $s_i \neq 0$ gilt

$$r_iv_i = r_i(1 \cdot v_i) = r_i(s_i^{-1}s_iv_i) = (r_is_i^{-1})(s_iv_i) \quad \text{für alle } i = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Folglich ist

$$v = r_1v_1 + r_2v_2 + \ldots + r_mv_m = (r_1s_1^{-1})(s_1v_1) + (r_2s_2^{-1})(s_2v_2) + \ldots + (r_ms_m^{-1})(s_mv_m)$$

eine LK der Vektoren aus C.

50. Aufgabe: a) Sei T ein EZS von V aus $m = \dim_{\mathbb{R}}(V)$ Elementen.

Annahme: T ist linear abhängig.

Dann existiert ein Vektor $v \in T$ mit $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(T \setminus \{v\}) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(T) = V$, d.h. $T' := T \setminus \{v\}$ ist auch ein EZS von V. Folglich enthält T' nach (9.9) eine Basis B von V. Da T' genau $m-1$ Elemente besitzt, kann auch B nur höchstens $m-1$ Elemente enthalten im Widerspruch zu (9.13).

b) Sei S eine linear unabhängige Teilmenge von V aus $m = \dim_{\mathbb{R}}(V)$ Elementen.

Annahme: S ist kein EZS von V.

Dann gibt es einen Vektor $v \in V$, der sich nicht als LK der Vektoren aus S darstellen läßt, d.h. $v \in V \setminus \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(S)$. Da S linear unabhängig ist, ist die Teilmenge $S \cup \{v\}$ nach (9.7) linear unabhängig. Diese Teilmenge enthält aber genau $m+1$ Elemente und müßte daher nach (9.10) linear abhängig sein, **Widerspruch!**

51. Aufgabe: Beweisstruktur

$$\begin{array}{ccccc} a) & \Longleftarrow & b) & \Longleftrightarrow & f) \\ \Downarrow & & \Uparrow & & \\ c) & \Longrightarrow & d) & \Longleftrightarrow & e) \end{array}$$

$a) \Longrightarrow c)$

Nach (3.17) ist jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ eine LK der Spalten von $\boldsymbol{A}$, d.h. $\boldsymbol{S}$ ist ein EZS von $\boldsymbol{R}^n$.

$c) \Longrightarrow d)$

$\boldsymbol{S}$ ist ein $\boldsymbol{n}$–elementiges EZS des $\boldsymbol{n}$–dimensionalen Vektorraumes $\mathbb{R}^n$. Nach Aufgabe 50a) ist dann $\boldsymbol{S}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

$d) \Longrightarrow b)$

Da $\boldsymbol{S}$ insbesondere ein EZS von $\mathbb{R}^n$ ist, ist jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ eine LK der Spalten von $\boldsymbol{A}$, so daß das LGS $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ nach (3.17) für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ lösbar ist.

Das homogene LGS $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{o_n}$ besitzt nur die triviale Lösung, da die Spalten von $\boldsymbol{A}$ linear unabhängig sind. Ist nun $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ beliebig und sind $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}' \in \mathbb{R}^n$ Lösungen von $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, so ist $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}'$ eine Lösung von $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{o_n}$. Folglich $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}' = \boldsymbol{o_n}$, woraus sich $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}'$ ergibt. Damit ist $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar.

$b) \Longrightarrow a)$ Klar!

$b) \Longleftrightarrow f)$ Gilt nach (10.15)

$d) \Longrightarrow e)$ Klar!

$e) \Longrightarrow d)$

Eine $\boldsymbol{n}$–elementige linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist nach Aufgabe 50b) eine Basis von $\mathbb{R}^n$, da $\mathbf{dim}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \boldsymbol{n}$.

52. Aufgabe: Seien $\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2}, \ldots, \boldsymbol{s_n}$ die Spaltenvektoren der Matrix $\boldsymbol{B}$. Aus der Voraussetzung $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E_n}$ folgt

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{s_i} = \boldsymbol{e_i} \quad \text{für alle } \boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \ldots, \boldsymbol{n},$$

wobei $\boldsymbol{e_i}$ der $\boldsymbol{i}$–te Einheitsvektor aus $\mathbb{R}^n$ ist. Sei $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann folgt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} &= r_1 e_1 + \ldots + r_n e_n \\ &= r_1(As_1) + \ldots r_n(As_n) \\ &= A(r_1 s_1) + \ldots + A(r_n s_n) \\ &= A(r_1 s_1 + \ldots + r_n s_n) \\ &= A \cdot c\,. \end{aligned}$$

Also ist $\boldsymbol{c} = r_1 s_1 + \ldots + r_n s_n \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des LGS's $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Folglich ist das LGS $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ lösbar, so daß die Matrix $\boldsymbol{A}$ nach Aufgabe 51 invertierbar ist. $\boldsymbol{A}$ besitzt also eine inverse Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$.

$$A^{-1}\cdot \mid AB = E_n \quad\Longrightarrow\quad B = A^{-1}\,.$$

Daraus folgt die Behauptung

$$B\cdot A \;=\; A^{-1}\cdot A \;=\; E_n\,.$$

53. Aufgabe: a) $f(w) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Z.z. **1)** f ist linear und **2)** f ist bijektiv.

1) $\mathbf{LA_1})$ Seien $v = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_4 \end{pmatrix}$, $v' = \begin{pmatrix} r'_1 \\ \vdots \\ r'_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Z.z. $f(v+v') = f(v) + f(v')$.

$$\underline{f(v+v')} = f(\begin{pmatrix} r_1 + r'_1 \\ \vdots \\ r_4 + r'_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} r_1 + r'_1 & r_2 + r'_2 \\ r_3 + r'_3 & r_4 + r'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r'_1 & r'_2 \\ r'_3 & r'_4 \end{pmatrix} = \underline{f(v) + f(v')}$$

$\mathbf{LA_2})$ Seien $r \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^4$. Z.z. $f(rv) = rf(v)$

$$\underline{f(rv)} \;=\; f(r\cdot\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_4 \end{pmatrix}) \;=\; f(\begin{pmatrix} rr_1 \\ \vdots \\ rr_4 \end{pmatrix}) \;=\; \begin{pmatrix} rr_1 & rr_2 \\ rr_3 & rr_4 \end{pmatrix} \;=\; r\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix} \;=\; \underline{rf(v)}$$

2) Offensichtlich sind die beiden Bedingungen aus (E.07) erfüllt, so daß f bijektiv ist.

c) $T := \{f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\} \;=\; \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$= \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$.

Von der rechts stehenden Menge wissen wir, daß sie eine Basis von $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ ist. Dies folgt aber auch mit (10.7) , da f ein Isomorphismus ist und $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ eine Basis (nämlich die kanonische) von $\mathbb{R}^4$ ist.

54. Aufgabe: a) Die Vektorraum–Eigenschaften aus (8.1) lassen sich einfach nachprüfen. So gilt z.B. $\mathbf{SM_3})$, weil die Multiplikation auf $\mathbb{R}$ assoziativ ist.

$B = \{\,1\,\}$ ist eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}$. B ist linear unabhängig, da $1 \neq 0$, und wegen $r = r\cdot 1$ für jedes $r \in \mathbb{R}$ ist B auch ein EZS von $\mathbb{R}$. Insgesamt ist also B eine Basis von $\mathbb{R}$, und es folgt

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \;=\; |\,B\,| \;=\; 1\,.$$

Es sei angemerkt, daß jede einelementige Teilmenge $\{s\} \subseteq \mathbb{R}$ mit $s \neq 0$ eine Basis von $\mathbb{R}$ ist.

b) $\mathbf{LA_1})$ Seien $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ zwei beliebige (3×3)–Matrizen. Z.z.

$$sp(A+B) \;=\; sp(A) + sp(B)\,.$$

Es ist $A + B \;=\; (a_{ik} + b_{ik})$, also

$$
\begin{aligned}
\underline{sp(A+B)} &= (a_{11}+b_{11})+(a_{22}+b_{22})+(a_{33}+b_{33}) \\
&= (a_{11}+a_{22}+a_{33})+(b_{11}+b_{22}+b_{33}) \\
&= \underline{sp(A)+sp(B)}\,.
\end{aligned}
$$

LA$_2$) Z.z. $sp(rA) = rsp(A)$ für alle $r \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.
Es ist $rA = (ra_{ik})$, also

$$\underline{sp(rA)} = (ra_{11})+(ra_{22})+(ra_{33}) = r(a_{11}+a_{22}+a_{33}) = \underline{rsp(A)}\,.$$

Damit ist sp eine **lineare** Abbildung. sp ist **kein** Isomorphismus, da sp nicht bijektiv ist. Es gilt nämlich

$$sp(E_{11}) = 1+0+0 = 1 = 0+1+0 = sp(E_{22}) \quad \text{mit} \quad E_{11} \neq E_{22}\,,$$

so daß die Bedingung **i)** aus (E.07) nicht erfüllt ist.

c) Nachweis der Untervektorraum–Eigenschaften aus (8.5) für U :

U$_1$) Der Nullvektor in $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ ist die (3×3)–Nullmatrix O_3 .
Wegen $sp(O_3) = 0+0+0 = 0$ gilt $O_3 \in U$.

U$_2$) Seien $A, B \in U$. Z.z. $A+B \in U$.

$$A, B \in U \implies sp(A)=0\,,\ sp(B)=0 \implies$$

$$sp(A+B) \overset{b)}{=} sp(A)+sp(B) = 0+0 = 0\,, \quad \text{d.h.} \quad A+B \in U\,.$$

U$_3$) Seien $r \in \mathbb{R}$ und $A \in U$. Z.z. $rA \in U$.

$$A \in U \implies sp(A)=0 \implies sp(rA) \overset{b)}{=} rsp(A) = r\cdot 0 = 0 \quad \text{d.h.} \quad rA \in U\,.$$

d) Um die Dimension von U zu bestimmen, müssen wir zunächst eine Basis von U finden. U ist ein UVR des 9–dimensionalen Vektorraumes $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Da bei einer Matrix A aus U die Summe der 3 Hauptdiagonalelemente 0 ist, läßt sich ein Haupdiagonalelement aus den beiden anderen Hauptdiagonalelementen bestimmen, d.h. es sind 2 Haupdiagonalelemente von A “frei wählbar” . Die übrigen 6 Elemente von A sind auch “frei wählbar” , so daß insgesamt 8 Elemnete von $A \in U$ “frei wählbar” sind. Dies ist ein Indiz dafür, daß U die Dimension 8 hat. Bei der Suche nach einer Basis von U ist darauf zu achten, daß die Basiselemente auch wirklich in U liegen!

Die 6 Matrizen $E_{ik} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ mit $i \neq k$ liegen alle in U , da ihre Hauptdiagonalelemente alle 0 sind. Die LK’en dieser Matrizen ergeben alle (3×3)–Matrizen, bei denen alle Hauptdiagonalelemente 0 sind. Jetzt müssen wir uns noch um die Elemente auf der Hauptdiagonale kümmern. Für eine Matrix $A = (a_{ik}) \in U$ gilt $0 = sp(A) = a_{11}+a_{22}+a_{33}$, d.h.

$$a_{33} = -a_{11}-a_{22}\,.$$

Wir stellen nun A dar in der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}}_{=C} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}}_{=D}$$

$\boldsymbol{C}$ ist eine LK der $\boldsymbol{E_{ik}}$ $(\boldsymbol{i \neq k})$

$$\boldsymbol{C} \;=\; \boldsymbol{a_{12}E_{12} + a_{13}E_{13} + a_{21}E_{21} + a_{23}E_{23} + a_{31}E_{31} + a_{32}E_{32}}\,,$$

während wir für $\boldsymbol{D}$ schreiben können:

$$\underline{\boldsymbol{D}} \;=\; \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{11}-a_{22} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \; a_{11}\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=E'} + \; a_{22}\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=E''} \;=\; \underline{a_{11}\cdot E' + a_{22}\cdot E''}\,.$$

Wegen $\boldsymbol{sp(E') \;=\; 1+0-1 \;=\; 0}$ und $\boldsymbol{sp(E'') \;=\; 0+1-1 \;=\; 0}$ gilt $\boldsymbol{E', E'' \in U}$. Damit ist

$$\boldsymbol{\mathcal{B} := \;\{\, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{23}, E_{31}, E_{32}, E', E''\,\}}$$

eine Teilmenge von $\boldsymbol{U}$, von der wir gerade gezeigt haben, daß es sich dabei um ein EZS von $\boldsymbol{U}$ handelt; denn für $\boldsymbol{A = (a_{ik}) \in U}$ gilt

$$\boldsymbol{A \;=\; C{+}D \;=\; (a_{12}E_{12}{+}a_{13}E_{13}{+}a_{21}E_{21}{+}a_{23}E_{23}{+}a_{31}E_{31}{+}a_{32}E_{32}){+}(a_{11}{\cdot}E'{+}a_{22}{\cdot}E'') \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathcal{B})}\,.$$

Wir wollen nun zeigen, daß $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ auch linear unabhängig ist. Seien dazu $\boldsymbol{r_{12}, r_{13}, r_{21}, r_{23}, r_{31}, r_{32}, r', r''}$ beliebige reelle Skalare mit der Eigenschaft

$$\boldsymbol{r_{12}E_{12} + r_{13}E_{13} + r_{21}E_{21} + r_{23}E_{23} + r_{31}E_{31} + r_{32}E_{32} + r'E' + r''E'' \;=\; O_3}\,.$$

Rechnet man die linke Seite aus, so erhält man

$$\begin{pmatrix} r' & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r'' & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & -r'-r'' \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so daß alle Skalare Null sein müssen. Damit ist $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ linear unabhängig. Insgesamt ist also $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ eine **Basis** von $\boldsymbol{U}$, und es folgt

$$\boldsymbol{\dim_{\mathbb{R}}(U) \;=\; |\,\mathcal{B}\,| \;=\; 8}\,.$$

e) Die Abbildung $\boldsymbol{sp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}}$ ordne jeder Matrix $\boldsymbol{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$ die Summe der Hauptdiagonalelemente von $\boldsymbol{A}$ zu. Dann ist $\boldsymbol{sp}$ eine lineare Abbildung, die im Falle $\boldsymbol{n \geq 2}$ kein Isomorphismus ist. Man mache sich klar, daß $\boldsymbol{sp}$ für $\boldsymbol{n = 1}$ wirklich ein Isomorphismus ist! Die Menge

$$\boldsymbol{W := \;\{\, A \,|\, A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\,,\; sp(A) = 0\,\}}$$

ist ein Untervektorraum von $\boldsymbol{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$. Entsprechend zum Fall $\boldsymbol{n = 3}$ kann man zeigen

$$\boldsymbol{\dim_{\mathbb{R}}(W) \;=\; n^2 - 1}\,.$$

55. Aufgabe: Wir fassen die 2–Tupel aus $\mathbb{R}^2$ als Koordinaten der Punkte der anschaulichen Ebene bzgl. eines fest gewählten rechtwinkligen Koordinatensystems auf.

a) $f_A(e_1) = A \cdot e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$f_A(e_2) = A \cdot e_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$f_A(2e_1 + e_2) \overset{\star)}{=} 2f_A(e_1) + f_A(e_2) = 2\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$\star)$ gilt, da f_A eine lineare Abbildung ist.

Der Punkt $f_A(e_1)$ hat gleiche Koordinaten, liegt also auf der Geraden $y = x$ (das ist die Winkelhalbierende des 1. Quadranten), die einen Winkel von $45°$ mit der x–Achse einschließt. Sein Abstand zum Nullpunkt beträgt (nach Pythagoras!)

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$$

Der Punkt $f_A(e_2)$ liegt auf der Geraden $y = -x$ und schließt daher einen Winkel von $45°$ mit der y–Achse ein. Sein Abstand zum Nullpunkt beträgt 1.

Der Punkt $2e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat den Abstand $\sqrt{5}$ vom Nullpunkt. Die Gerade g durch den Nullpunkt und $2e_1 + e_2$ schließt einen Winkel von $30°$ mit der x–Achse ein. Der Bildpunkt $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ hat den Abstand

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{18}{4}} = \sqrt{5}$$

zum Nullpunkt. Die Gerade g' durch 0 und $f_A(2e_1 + e_2)$ schließt einen Winkel von $75°$ mit der x–Achse ein, so daß die Geraden g und g' einen Winkel von $45°$ einschließen.

Eine Zeichnung findet man auf einer Extraseite.

Fazit: Ein Punkt P und sein Bildpunkt P' unter f_A haben denselben Abstand zum Nullpunkt und die Geraden $0P$ und $0P'$ schließen einen Winkel von $45°$ ein (dies läßt sich allgemein zeigen). f_A ist also die Drehung um 0 um den Winkel von $45°$.

b) $f_B(e_1) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$f_B(e_2) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$

$f_B(\begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$

$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ ist also ein Fixpunkt von $\boldsymbol{f_B}$. Da $\boldsymbol{f_B}$ eine lineare Abbildung ist, gilt

$$\boldsymbol{f_B(rP) \; = \; rf_B(P) \; = \; rP} \quad (\text{für alle } \boldsymbol{r} \in \mathbb{R})\,,$$

d.h. alle Punkte der Geraden $\boldsymbol{g = 0P}$ sind Fixpunkte von $\boldsymbol{f_B}$ oder $\boldsymbol{g}$ ist eine Fixgerade von $\boldsymbol{f_B}$. Die Gerade $\boldsymbol{g}$ hat die Steigung $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$. Dazu gehört der Steigungswinkel von $\boldsymbol{30^\circ}$.

Die Verbindungsgerade $\boldsymbol{h}$ der beiden Punkte $\boldsymbol{e_1}$ und $\boldsymbol{f_B(e_1)}$ steht senkrecht auf $\boldsymbol{g}$ und schneidet die Gerade $\boldsymbol{g}$ im Mittelpunkt der Strecke zwischen $\boldsymbol{e_1}$ und $\boldsymbol{f_B(e_1)}$. Entsprechendes gilt für $\boldsymbol{e_2}$ und $\boldsymbol{f_B(e_2)}$.

Eine Zeichnung findet man auf einer Extraseite.

Fazit: Alle Punkte der Geraden $\boldsymbol{g}$ durch den Nullpunkt, die mit der positiven $\boldsymbol{x}$–Achse den Winkel $\boldsymbol{30^\circ}$ einschließt, werden von $\boldsymbol{f_B}$ festgelassen. Ein Punkt $\boldsymbol{Q}$, der nicht auf der Geraden $\boldsymbol{g}$ liegt, wird auf einen Punkt $\boldsymbol{Q'}$ durch $\boldsymbol{f_B}$ abgebildet, so daß $\boldsymbol{g}$ das Mittellot der Verbindungsstrecke von $\boldsymbol{Q}$ und $\boldsymbol{Q'}$ ist. $\boldsymbol{f_B}$ ist also die Spiegelung der Ebene an der Geraden $\boldsymbol{g}$.

56. Aufgabe: a) Eine Zeichnung findet man auf einer Extraseite.

$\boldsymbol{d}$ ist bijektiv, da die Drehung der Ebene um den Nullpunkt um den Winkel $\boldsymbol{360^\circ - \alpha}$ die Umkehrabbildung von $\boldsymbol{d}$ ist. (Besitzt eine Abbildung $\boldsymbol{f}$ eine Umkehrabbildung, so läßt sich leicht zeigen, daß für $\boldsymbol{f}$ die Bedingungen aus (E.07) gelten, so daß $\boldsymbol{f}$ bijektiv ist)

b) Annahme: Eine Drehung $\boldsymbol{d}$ um einen Punkt $\boldsymbol{M \neq 0}$ ist linear. Dann müßte nach (10.7a) $\boldsymbol{0}$ ein Fixpunkt von $\boldsymbol{d}$ sein. Die Drehung $\boldsymbol{d}$ hat aber nur einen einzigen Fixpunkt, nämlich den Drehpunkt $\boldsymbol{M \neq 0}$. Widerspruch!

c) Eine Zeichnung findet man auf einer Extraseite.

$\boldsymbol{s}$ ist bijektiv, da $\boldsymbol{s}$ die Umkehrabbildung von $\boldsymbol{s}$ ist (zweimal gespiegelt ergibt das ursprüngliche Bild!).

d) Sei $\boldsymbol{s}$ eine Spiegelung von $\boldsymbol{V_2}$ an einer Geraden $\boldsymbol{g}$, die nicht durch den Nullpunkt geht. Dann sind die Punkte von $\boldsymbol{g}$ die einzigen Fixpunkte von $\boldsymbol{s}$. Annahme: $\boldsymbol{s}$ ist linear. Dann müßte nach (10.7a) $\boldsymbol{0}$ ein Fixpunkt von $\boldsymbol{s}$ sein. Widerspruch, da $\boldsymbol{0}$ nicht auf der Geraden $\boldsymbol{g}$ liegt.

57. Aufgabe: a) Daß $\mathcal{D}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{A}$ ist, liegt an bekannten Eigenschaften differezierbarer Funktionen.

U₁) Jede konstante Funktion ist differenzierbar
Also liegt der Nullvektor von $\mathcal{A}$ (das ist die Nullfunktion $x \longmapsto 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$) in $\mathcal{D}$.

U₂) Die Summe zweier differenzierbarer Funktionen ist wieder differenzierbar, d.h.
$f, g \in \mathcal{D} \implies f + g \in \mathcal{D}$.

U₃) Das skalare Vielfache einer differenzierbaren Funktionen ist wieder differenzierbar, d.h.
$r \in \mathbb{R}\,,\ f \in \mathcal{D} \implies rf \in \mathcal{D}$.

b) Daß D linear ist, liegt an den beiden bekannten Differentiationsregeln:

LA₁) Die Ableitung einer Summe zweier differenzierbarer Funktionen ist gleich der Summe der Ableitungen. Das bedeutet für $f, g \in \mathcal{D}$
$D(f+g) = (f+g)' = f' + g' = D(f) + D(g)$

LA₂) Die Ableitung des skalaren Vielfachen einer differenzierbaren Funktionen ist gleich dem skalaren Vielfachen der Ableitung, d.h. für $r \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{D}$ gilt
$D(rf) = (rf)' = r\,f' = rD(f)$

c) D ist **kein** Isomorphismus, da D nicht bijektiv ist. Unterschiedliche Funktionen können dieselbe Ableitung haben, z.B.

$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ seien definiert durch $f(x) = x + 1\,,\ g(x) = x + 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann sind f und g differenzierbar (d.h. $f, g \in \mathcal{D}$), und es gilt

$$f'(x) = 1 = g'(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, \text{d.h. } f' = g'.$$

Es folgt

$$D(f) = D(g) \text{ mit } f \neq g.$$

so daß D nach (E.07) nicht bijektiv sein kann.