15. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA (SS 2008)

Dieses Übungsblatt behandelt Aufgaben zu den Paragraphen 9 und 10
und soll der Prüfungsvorbereitung dienen.
Es wird auch eine Musterlösung geben.
Versuche aber auf jeden Fall, die Aufgaben erst einmal selbständig zu bearbeiten und zu lösen!!!

49. Aufgabe: Sei $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ eine Basis des Vektorraumes $\boldsymbol{V}$. Beweise: Sind $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_m$ beliebige reelle Zahlen, die alle ungleich Null sind, so ist auch die Menge

$$\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{s}_2\boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_m\boldsymbol{v}_m\}$$

eine Basis von $\boldsymbol{V}$.

50. Aufgabe: Sei $\boldsymbol{V}$ ein $\boldsymbol{m}$–dimensionaler Vektorraum $(\boldsymbol{m} \geq \boldsymbol{1})$. Beweise:

a) Jedes EZS $\boldsymbol{T}$ von $\boldsymbol{V}$ mit genau $\boldsymbol{m}$ Elementen ist eine Basis von $\boldsymbol{V}$.

b) Jede linear unabhängige Teilmenge $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{V}$ mit genau $\boldsymbol{m}$ Elementen ist eine Basis von $\boldsymbol{V}$.

51. Aufgabe: Sei $\boldsymbol{A} \in \mathrm{M}_{\boldsymbol{n}}(\mathbb{R})$ eine Matrix. $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_n\} \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ sei die Menge der Spaltenvektoren von $\boldsymbol{A}$. Beweise die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) Das LGS $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ist für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ lösbar

b) Das LGS $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ist für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ eindeutig lösbar

c) $\boldsymbol{S}$ ist ein EZS von $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

d) $\boldsymbol{S}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

e) $\boldsymbol{S}$ ist linear unabhängig

f) $\boldsymbol{A}$ ist invertierbar.

52. Aufgabe: $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ seien zwei $(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n})$–Matrizen. Beweise:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}_n \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_n\,.$$

53. Aufgabe: Die Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sei definiert durch

$$f(v) := \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad v = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 .$$

a) Berechne den Bildwert $f(w)$ für $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

b) Beweise, daß f ein Isomorphismus ist.

c) Bestimme die Menge $T := \{f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\}$ (hierbei sind $e_1, \ldots, e_4$ die Einheitsvektoren aus $\mathbb{R}^4$). Was läßt sich über T aussagen ?

54. Aufgabe: a) Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen läßt sich als Vektorraum auffassen. Dabei ist die Vektorraum–Addition die "normale" Addition auf $\mathbb{R}$ und die skalare Multiplikation ist die "normale" Multiplikation auf $\mathbb{R}$. Verifiziere die Vektorraum–Eigenschaften von $\mathbb{R}$. Welche Dimension hat der Vektorraum $\mathbb{R}$?

b) Die Abbildung $sp : \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$sp(A) := a_{11} + a_{22} + a_{33} \quad \text{für} \quad A = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) ,$$

d.h. sp ordnet einer (3×3)–Matrix A die Summe der Hauptdiagonalelemente von A zu. Beweise, daß sp eine lineare Abbildung ist. Ist sp ein Isomorphismus?

c) Beweise, daß

$$U := \{ A \mid A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) , \ sp(A) = 0 \}$$

ein Untervektorraum von $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ ist.

d) Bestimme die Dimension von U.

e) Verallgemeinere **b)** bis **d)** auf $(n \times n)$–Matrizen. Ist es möglich, daß sp für spezielles n ein Isomorphismus ist?

55. Aufgabe: a) Sei $A = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Bilde gemäß (10.4) die lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 , \ v \longmapsto A \cdot v$. Berechne die Bildwerte $f_A(e_1), f_A(e_2), f_A(2e_1 + e_2)$ und stelle die Situation zeichnerisch in der Ebene dar. Beschreibe die Abbildung f_A anschaulich–geometrisch.

b) Sei $B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Bilde gemäß (10.4) die lineare Abbildung $f_B : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 , \ v \longmapsto B \cdot v$. Berechne die Bildwerte $f_B(e_1), f_B(e_2), f_B(\begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix})$ und stelle die Situation zeichnerisch in der Ebene dar. Beschreibe die Abbildung f_B anschaulich–geometrisch.

56. Aufgabe: Sei $\boldsymbol{V_2}$ der Vektorraum der Vektoren der anschaulichen Ebene.

a) $\boldsymbol{d : V_2 \longrightarrow V_2}$ sei die Drehung von $\boldsymbol{V_2}$ um den Nullpunkt um den Winkel $\boldsymbol{\alpha}$ $(\boldsymbol{0° \leq \alpha \leq 360°})$. Zeichne zwei signifikante Bilder (und zwar eines für die Addition und eines für die skalare Multiplikation), aus denen hervorgeht, daß $\boldsymbol{d}$ eine lineare Abbildung ist. Ist $\boldsymbol{d}$ ein Isomorphismus?

b) Kann eine Drehung von $\boldsymbol{V_2}$ um einen vom Nullpunkt verschiedenen Drehpunkt linear sein?

c) $\boldsymbol{s : V_2 \longrightarrow V_2}$ sei die Spiegelung von $\boldsymbol{V_2}$ an einer Geraden, die durch den Nullpunkt verläuft . Zeichne zwei signifikante Bilder (und zwar eines für die Addition und eines für die skalare Multiplikation), aus denen hervorgeht, daß $\boldsymbol{s}$ eine lineare Abbildung ist. Ist $\boldsymbol{s}$ ein Isomorphismus?

d) Kann eine Spiegelung von $\boldsymbol{V_2}$ an einer Geraden, die nicht durch den Nullpunkt geht, linear sein ?

57. Aufgabe: Diese Aufgabe ist nur für StudentInnen gedacht, die etwas Ahnung von Analysis haben. (Aber eigentlich ist dies auch Schulstoff!)

Sei $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ die Menge aller differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Beweise:

a) $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ ist ein Untervektorraum des Vektorraumes $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (s. (E.14)) .

b) Die Abbildung $\boldsymbol{D : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}}$, die einer differenzierbaren Funktion $\boldsymbol{f}$ deren Ableitung $\boldsymbol{f'}$ zuordnet (d.h. $\boldsymbol{D(f) = f'}$) , ist eine lineare Abbildung.

c) Untersuche, ob die Abbildung $\boldsymbol{D}$ aus b) ein Isomorphismus ist.