

## 15. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA (SS 2008)

Dieses Übungsblatt behandelt Aufgaben zu den Paragraphen 9 und 10 und soll der **Prüfungsvorbereitung** dienen.

Es wird auch eine Musterlösung geben.

Versuche aber auf jeden Fall, die Aufgaben erst einmal **selbständig** zu bearbeiten und zu lösen!!!

**49. Aufgabe:** Sei  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  eine Basis des Vektorraumes  $V$ . Beweise: Sind  $s_1, s_2, \dots, s_m$  beliebige reelle Zahlen, die alle ungleich Null sind, so ist auch die Menge

$$C = \{s_1 v_1, s_2 v_2, \dots, s_m v_m\}$$

eine Basis von  $V$ .

**50. Aufgabe:** Sei  $V$  ein  $m$ -dimensionaler Vektorraum ( $m \geq 1$ ). Beweise:

- a) Jedes EZS  $T$  von  $V$  mit genau  $m$  Elementen ist eine Basis von  $V$ .
- b) Jede linear unabhängige Teilmenge  $S \subseteq V$  mit genau  $m$  Elementen ist eine Basis von  $V$ .

**51. Aufgabe:** Sei  $A \in M_n(\mathbb{R})$  eine Matrix.  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$  sei die Menge der Spaltenvektoren von  $A$ . Beweise die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- a) Das LGS  $Ax = b$  ist für jedes  $b \in \mathbb{R}^n$  lösbar
- b) Das LGS  $Ax = b$  ist für jedes  $b \in \mathbb{R}^n$  eindeutig lösbar
- c)  $S$  ist ein EZS von  $\mathbb{R}^n$
- d)  $S$  ist eine Basis von  $\mathbb{R}^n$
- e)  $S$  ist linear unabhängig
- f)  $A$  ist invertierbar.

**52. Aufgabe:**  $A$  und  $B$  seien zwei  $(n \times n)$ -Matrizen. Beweise:

$$A \cdot B = E_n \implies B \cdot A = E_n.$$

**53. Aufgabe:** Die Abbildung  $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$  sei definiert durch

$$f(v) := \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix} \quad \text{für } v = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

a) Berechne den Bildwert  $f(w)$  für  $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ .

b) Beweise, daß  $f$  ein Isomorphismus ist.

c) Bestimme die Menge  $T := \{f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\}$  (hierbei sind  $e_1, \dots, e_4$  die Einheitsvektoren aus  $\mathbb{R}^4$ ). Was läßt sich über  $T$  aussagen?

**54. Aufgabe: a)** Die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen läßt sich als Vektorraum auffassen. Dabei ist die Vektorraum-Addition die "normale" Addition auf  $\mathbb{R}$  und die skalare Multiplikation ist die "normale" Multiplikation auf  $\mathbb{R}$ . Verifiziere die Vektorraum-Eigenschaften von  $\mathbb{R}$ . Welche Dimension hat der Vektorraum  $\mathbb{R}$ ?

b) Die Abbildung  $sp : M_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch

$$sp(A) := a_{11} + a_{22} + a_{33} \quad \text{für } A = (a_{ik}) \in M_3(\mathbb{R}),$$

d.h.  $sp$  ordnet einer  $(3 \times 3)$ -Matrix  $A$  die Summe der Hauptdiagonalelemente von  $A$  zu.

Beweise, daß  $sp$  eine lineare Abbildung ist. Ist  $sp$  ein Isomorphismus?

c) Beweise, daß

$$U := \{A \mid A \in M_3(\mathbb{R}), sp(A) = 0\}$$

ein Untervektorraum von  $M_3(\mathbb{R})$  ist.

d) Bestimme die Dimension von  $U$ .

e) Verallgemeinere b) bis d) auf  $(n \times n)$ -Matrizen. Ist es möglich, daß  $sp$  für spezielles  $n$  ein Isomorphismus ist?

**55. Aufgabe: a)** Sei  $A = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ . Bilde gemäß (10.4) die lineare Abbildung  $f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $v \longmapsto A \cdot v$ . Berechne die Bildwerte  $f_A(e_1)$ ,  $f_A(e_2)$ ,  $f_A(2e_1 + e_2)$  und stelle die Situation zeichnerisch in der Ebene dar. Beschreibe die Abbildung  $f_A$  anschaulich-geometrisch.

b) Sei  $B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ . Bilde gemäß (10.4) die lineare Abbildung  $f_B : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $v \longmapsto B \cdot v$ . Berechne die Bildwerte  $f_B(e_1)$ ,  $f_B(e_2)$ ,  $f_B\left(\begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right)$  und stelle die Situation zeichnerisch in der Ebene dar. Beschreibe die Abbildung  $f_B$  anschaulich-geometrisch.

**56. Aufgabe:** Sei  $\mathbf{V}_2$  der Vektorraum der Vektoren der anschaulichen Ebene.

a)  $\mathbf{d} : \mathbf{V}_2 \longrightarrow \mathbf{V}_2$  sei die Drehung von  $\mathbf{V}_2$  um den Nullpunkt um den Winkel  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ ). Zeichne zwei signifikante Bilder (und zwar eines für die Addition und eines für die skalare Multiplikation), aus denen hervorgeht, daß  $\mathbf{d}$  eine lineare Abbildung ist. Ist  $\mathbf{d}$  ein Isomorphismus?

b) Kann eine Drehung von  $\mathbf{V}_2$  um einen vom Nullpunkt verschiedenen Drehpunkt linear sein?

c)  $\mathbf{s} : \mathbf{V}_2 \longrightarrow \mathbf{V}_2$  sei die Spiegelung von  $\mathbf{V}_2$  an einer Geraden, die durch den Nullpunkt verläuft. Zeichne zwei signifikante Bilder (und zwar eines für die Addition und eines für die skalare Multiplikation), aus denen hervorgeht, daß  $\mathbf{s}$  eine lineare Abbildung ist. Ist  $\mathbf{s}$  ein Isomorphismus?

d) Kann eine Spiegelung von  $\mathbf{V}_2$  an einer Geraden, die nicht durch den Nullpunkt geht, linear sein?

**57. Aufgabe:** Diese Aufgabe ist nur für StudentInnen gedacht, die etwas Ahnung von Analysis haben. (Aber eigentlich ist dies auch Schulstoff!)

Sei  $\mathcal{D}$  die Menge aller differenzierbaren Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ . Beweise:

a)  $\mathcal{D}$  ist ein Untervektorraum des Vektorraumes  $\mathcal{A}$  aller Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  (s. (E.14)).

b) Die Abbildung  $\mathbf{D} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ , die einer differenzierbaren Funktion  $\mathbf{f}$  deren Ableitung  $\mathbf{f}'$  zuordnet (d.h.  $\mathbf{D}(\mathbf{f}) = \mathbf{f}'$ ), ist eine lineare Abbildung.

c) Untersuche, ob die Abbildung  $\mathbf{D}$  aus b) ein Isomorphismus ist.