13. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA (SS 2008)

Abgabe: Fr. 11.7.2008, bis 9.15 Uhr

Gruppe 1 (Mo): Fach Nr. 3 (orangener Schrank bei D1.348)

Gruppe 2 (Do): Fach Nr. 11 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Es können **Bonuspunkte** für die Übungsschein–Klausur erworben werden.

Es ist nur Einzelabgabe erlaubt.

Begründen Sie bitte Ihren Lösungsweg bzw. erklären Sie Ihren Rechenweg!

41. Aufgabe: Untersuche in den folgenden Fällen, ob die Menge T linear abhängig oder linear unabhängig ist (natürlich mit Begründung!):

a) $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ **b)** $T = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^5$

c) $T = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$ **d)** $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(5)

42. Aufgabe: a) Seien $A, B \in \mathrm{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ und $r \in \mathbb{R}$. Beweise:

i) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ **ii)** ${}^t(rA) = r({}^tA)$.

(Entsprechend gelten dann diese Aussagen auch für Matrizen aus $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, was im folgenden benutzt werden darf!)

b) Eine quadratische Matrix $A = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ heißt **symmetrisch**, wenn ${}^tA = A$ (d.h. $a_{ik} = a_{ki}$ für alle i, k) gilt. Beweise, daß die Menge S der symmetrischen Matrizen aus $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ ein Untervektorraum von $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ ist.

c) Finde ein linear unabhängiges EZS (also eine Basis) B von S (natürlich ist die Antwort zu begründen!). Wieviel Elemente besitzt B? (**Hinweis:** Eine Idee könnte (8.11d) liefern. Ein EZS von S darf nur Elemente aus S enthalten!)

d) Wie läßt sich c) auf den Untervektorraum U aller symmetrischen $(n \times n)$–Matrizen verallgemeinern? (ohne Beweis!) (6)

43. Aufgabe: V sei ein Vektorraum. S, T seien Teilmengen von V mit $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ und $S \subseteq T$. Beweise:

a) Ist S ein EZS von V, so ist auch T ein EZS von V.

b) Ist T linear unabhängig, so ist auch S linear unabhängig. (2)