

Anmerkungen zu der Graphik

In der Graphik sind die 3 Funktionen $\frac{x}{\ln x}$, Li und R dargestellt. Die kleinen Kreise geben exakte Werte von $\pi(x)$ an. Im einzelnen sind die Funktionen folgendermaßen definiert:

$\pi : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist die **Anzahlfunktion** mit $\pi(x) = |\{p \mid p \in \mathbb{P}, p \leq x\}|$

$\ln : \mathbb{R}_{> 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist der **natürliche Logarithmus** (d.h. die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{> 0}$)

$\text{Li} : \mathbb{R}_{\geq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist der **Integral-Logarithmus**, definiert durch $\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$

$\text{R} : \mathbb{R}_{\geq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist die **Riemann-Funktion**, definiert durch

$$\text{R}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(x)^k}{k \cdot k! \cdot \zeta(k+1)}$$

(hier ist ζ die Riemann'sche Zeta-Funktion) oder durch die (endliche) Reihe

$$\text{R}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} \cdot \text{Li}\left(x^{\frac{1}{k}}\right)$$

(mit der Möbius-Funktion μ).

Wertetabelle

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\pi(x)}$	$\frac{x}{\ln(x)}$	Li(x)	R(x)
10	4	2.5	4.34	5.12	4.56
10^2	25	4.0	21.71	29.08	25.66
10^3	168	6.0	144.76	176.56	168.36
10^4	1 229	8.1	1 086.00	1 245.09	1 226.93
10^5	9 592	10.4	8 686	9 628	9 587
10^6	78 498	12.7	72 384	78 626	78 527
10^7	664 579	15.0	620 421	664 917	664 917
10^8	5 761 455	17.4	5 428 681	5 762 208	5 761 552
10^9	50 847 534	19.7	48 254 942	50 849 233	50 847 455
10^{10}	455 052 512	22.0	434 294 481	455 055 613	455 050 683