§ 3. Teilbarkeit in $\mathbb{Z}$

(3.1) DEF: a und b seien ganze Zahlen. Dann heißt a ein **Teiler** von b (in Zeichen: $a \mid b$), wenn es eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit der Eigenschaft

$$\boxed{a \cdot k = b}\,.$$

In diesem Fall sagt man auch, daß a die Zahl b **teilt** oder daß b ein **(ganzzahliges) Vielfaches von** a ist.

$a \nmid b$ bedeutet, daß a **kein** Teiler von b ist.

(3.2) BEM: **a)** Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Gilt $a \mid b$ und ist $b \neq 0$, so gibt es genau ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $a \cdot k = b$. k heißt dann der **zu** a **komplementäre Teiler von** b.

b) Bei der Definition der Teilbarkeit wird nicht die Division benutzt. Nur im Falle $a \neq 0$ bedeutet $a \mid b$, daß $\dfrac{b}{a}$ eine ganze Zahl ist.

c) Für $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n \mid a \iff a \bmod n = 0$.

(3.3) SATZ: **Eigenschaften der Teilbarkeit**

a, b, c seien ganze Zahlen. Dann gilt:

a) $1 \mid a$, $-1 \mid a$, $a \mid a$, $-a \mid a$ für alle $a \in \mathbb{Z}$.

b) $a \mid 0$ für alle $a \in \mathbb{Z}$, insbesondere $0 \mid 0$.

c) $0 \mid b \iff b = 0$

d) $a \mid b$ und $b \mid c \implies a \mid c$ (**Transitivität von** $\mid$)

e) $b \neq 0$ und $a \mid b \implies |a| \leq |b|$

f) $a \mid b$ und $b \mid a \implies |a| = |b|$.

g) $a \mid b$ und $a \mid c \implies a \mid (xb + yc)$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}$

h) $a \mid b \iff |a| \mid |b|$.

(3.4) BEM: **a)** Nach (3.3) ist die Teilbarkeitsrelation $\mid$ eine reflexive und transitive Relation auf $\mathbb{Z}$. Man nennt daher $(\mathbb{Z}, \mid)$ auch eine **halbgeordnete Menge**. Die Einschränkung von $\mid$ auf die Mengen $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}$ ist wegen (3.3f) auch antisymmetrisch, d.h. $\mid$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}_0$ und auf $\mathbb{N}$. Die Teilbarkeitsrelation ist **nicht** linear ($2 \nmid 3$ und $3 \nmid 2$).

b) Jede ganze Zahl $b \neq 0$ besitzt nur endlich viele Teiler. Die Anzahl der Teiler von b ist $\leq 2 \cdot |b|$.

c) 0 ist die einzige ganze Zahl, die unendlich viele Teiler besitzt.

(3.5) DEF: Für $b \in \mathbb{Z}$ bezeichne

$$T(b) := \{ a \mid a \in \mathbb{Z} , a \mid b \} \subseteq \mathbb{Z}$$

die Menge aller (ganzzahligen) Teiler von b, die sog. **Teilermenge von** b, und

$$T^+(b) := \{ n \mid n \in \mathbb{N}_0 , n \mid b \} \subseteq \mathbb{N}_0$$

die Menge aller nichtnegativen Teiler von b.

(3.6) SATZ: Seien $k, l, n \in \mathbb{N}$ und gelte $n = k \cdot l$. Dann folgt $k \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ oder $l \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

(3.7) Verfahren zur Bestimmung aller (positiven) Teiler einer ganzen Zahl $b \neq 0$:

(1) Bestimme $m := \lfloor \sqrt{|b|} \rfloor$

(2) Teste der Reihe nach, ob die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, m$ Teiler von $|b|$ sind oder nicht. Berechne zu jedem gefundenen Teiler von $|b|$ den dazu komplementären Teiler von $|b|$. Auf diese Art erhält man alle positiven Teiler von b.

(3) Nimmt man zu jedem positiven Teiler a von b auch noch die negative Zahl $-a$ hinzu, so erhält man alle ganzzahligen Teiler von b.

(3.8) DEF: Die Anzahl aller positiven Teiler einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ wird mit $\boldsymbol{\tau(n)}$ bezeichnet. Die Funktion $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \longmapsto \tau(n)$, heißt **Teileranzahlfunktion**.

(3.9) BEM: **a)** $\tau(n) = |T^+(n)|$ **b)** Nach (3.4) gilt $1 \leq \tau(n) \leq n$

c)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\tau(n)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2
ungerade	↑			↑					↑							↑	

(3.10) SATZ: Sei $n \in \mathbb{N}$. Genau dann ist n eine Quadratzahl, wenn $\tau(n)$ ungerade ist.

(3.11) DEF: Die Summe aller positiven Teiler einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ wird mit $\boldsymbol{\sigma(n)}$ bezeichnet. Die Funktion $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \longmapsto \sigma(n)$, heißt **Teilersummenfunktion**.

(3.12) BEM: **a)** Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sigma(n) = \sum\limits_{t \in T^+(n)} t$.

b)

$$\begin{array}{rcll}
\sigma(1) & = & 1 & < 2\cdot 1 \\
\sigma(2) & = & 1+2=3 & < 2\cdot 2 \\
\sigma(3) & = & 1+3=4 & < 2\cdot 3 \\
\sigma(4) & = & 1+2+4=7 & < 2\cdot 4 \\
\sigma(5) & = & 1+5=6 & < 2\cdot 5 \\
\sigma(6) & = & 1+2+3+6=12 & = 2\cdot 6 \\
\sigma(7) & = & 1+7=8 & < 2\cdot 7 \\
\sigma(8) & = & 1+2+4+8=15 & < 2\cdot 8 \\
\sigma(9) & = & 1+3+9=13 & < 2\cdot 9 \\
\sigma(10) & = & 1+2+5+10=18 & < 2\cdot 10 \\
\sigma(11) & = & 1+11=12 & < 2\cdot 11 \\
\sigma(12) & = & 1+2+3+4+6+12=28 & > 2\cdot 12 \\
\sigma(13) & = & 1+13=14 & < 2\cdot 13 \\
\vdots & & & \\
\sigma(28) & = & 1+2+4+7+14+28=56 & = 2\cdot 28
\end{array}$$

(3.13) DEF: Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt **vollkommen**, wenn $\boldsymbol{\sigma(n) = 2\cdot n}$ gilt.

Beispiele: 6 und 28 sind vollkommene Zahlen.

Die Teilbarkeit zweier ganzer Zahlen läßt sich mit Hilfe der Teilermengen feststellen:

(3.14) SATZ: Für $a, b \in \mathbb{Z}$ sind folgende Aussagen äquivalent:
a) $a \mid b$ **b)** $T^+(a) \subseteq T^+(b)$ **c)** $T(a) \subseteq T(b)$.

Analog betrachten wir die Menge der Vielfachen

(3.15) DEF: Für $a \in \mathbb{Z}$ bezeichne

$$V(a) := \{\, b \mid b \in \mathbb{Z}\, ,\ a \mid b \,\} \subseteq \mathbb{Z}$$

die Menge aller (ganzzahligen) Vielfachen von a, die sog. **Vielfachenmenge von** a , und

$$V^+(a) := \{\, n \mid n \in \mathbb{N}_0\, ,\ a \mid n \,\} \subseteq \mathbb{N}_0$$

die Menge aller nichtnegativen Vielfachen von a .

(3.16) BEM: **a)** Es ist $V(a) = \mathbb{Z}a$ ein Ideal in $\mathbb{Z}$.
b) Für jedes $a \in \mathbb{Z}$, $\underline{a \neq 0}$ sind $V(a)$ und $V^+(a)$ unendliche Mengen.
c) 0 ist die einzige ganze Zahl, die nur endlich viele Vielfache besitzt ($V(0) = \{0\} = \mathbb{Z}0$).

(3.17) SATZ: Für $a, b \in \mathbb{Z}$ sind folgende Aussagen äquivalent:
a) $a \mid b$ **b)** $V^+(b) \subseteq V^+(a)$ **c)** $V(b) \subseteq V(a)$.