§18. Die Vermutungen von Goldbach, Waring und Pólya

A) Die Goldbach'sche Vermutung

Christian Goldbach (1690–1764) schrieb in seinem berühmten Brief vom 7. Juni 1742 an Leoanhard Euler

> "Es scheinet wenigstens, daß eine jede Zahl, die größer ist
> als 2, ein aggregatum trium numerorum primorum sey."

Hierzu ist anzumerken, daß Goldbach die Zahl 1 als Primzahl ansah. In unserer Bezeichnungsweise lautet die Vermutung

(G) Jede natürliche Zahl $\boldsymbol{n > 5}$ ist Summe von 3 Primzahlen.

Äquivalent dazu ist eine Fassung, die man heute als Goldbach–Vermutung versteht:

(G') Starke (oder binäre) Goldbachvermutung

Jede gerade natürliche Zahl $\boldsymbol{n > 2}$ ist Summe von 2 Primzahlen.

Eine andere Vermutung ist

(G") Schwache (oder ternäre) Goldbachvermutung
Jede ungerade natürliche Zahl $\boldsymbol{n > 5}$ ist Summe von 3 Primzahlen.

Die Goldbach–Vermutung ist bis heute weder bewiesen noch widerlegt.

Bewiesen werden konnte bisher:

- Jede gerade Zahl $> \mathbf{6}$ ist Summe von höchstens 6 Primzahlen.
- Jede genügend große gerade Zahl läßt sich als Summe aus einer Primzahl und dem Produkt aus höchstens 2 Primzahlen schreiben (Chen, 1966).
- (G") ist richtig für alle genügend großen natürlichen Zahlen (Vinogradoff, 1937). Diese Schranke konnte bis 1996 auf $\mathbf{10^{7194}}$ gesenkt werden.

Rechnerische Bestätigung der Goldbach–Vermutung:

geprüft von	Jahr	bis
A. Desboves	1855	$\mathbf{10\,000}$
N.Pipping	1940	$\mathbf{100\,000}$
M.K.Shen	1964	$\mathbf{3.3 \times 10^7}$
M.L.Stein, P.R.Stein	1965	$\mathbf{10^8}$
A.Granville,J.v.d.Lune, H.J.J.te Riele	1989	$\mathbf{2 \times 10^{10}}$
M.Sinisalo	1993	$\mathbf{4 \times 10^{11}}$
J.–M. Deshouillers, H.J.J.te Riele, Y.Saouter	1998	$\mathbf{10^{14}}$
T. Oliveira e Silva	2005	$\mathbf{2 \times 10^{17}}$

B) Die Waring'sche Vermutung

Bachet (1621) und Fermat (1640) vermuteten schon, daß sich jede natürliche Zahl als Summe von höchstens 4 Quadraten darstellen läßt. Dieses Ergebnis konnte Lagrange 1770 beweisen:

Vierquadrate–Satz: Jede natürliche Zahl ist Summe von höchstens 4 Quadraten.

Der englische Mathematiker **Edward Waring (1736–1798)** stellte in seinem Werk "Meditationes algebraicae" 1770 die allgemeinere Frage:

Ist jede natürliche Zahl Summe einer bestimmten Anzahl von $\boldsymbol{k}$–ten Potenzen ($\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$ fest).

Dabei stellte er die folgende Vermutung auf:

Waring'sche Vermutung:

Jede natürliche Zahl ist Summe von höchstens 19 Biquadraten.

Joseph Liouville (1809–1882) zeigte im Jahre 1859 , daß auf jeden Fall 53 Biquadrate ausreichen. Im Jahre 1909 konnte David Hilbert beweisen:

SATZ: Zu jedem $\boldsymbol{k \geq 2}$ existiert eine natürliche Zahl $\boldsymbol{s(k)}$, so daß sich jede natürliche Zahl $\boldsymbol{n}$ als Summe von höchstens $\boldsymbol{s(k)}$ $\boldsymbol{k}$–ten Potenzen darstellen läßt.

Mit $\boldsymbol{g(k)}$ werde der kleinstmögliche Wert von $\boldsymbol{s(k)}$ bezeichnet. Dann besagt die Waring'sche Vermutung gerade:

$$\boldsymbol{g(4) \;=\; 19\,.}$$

David Davenport (1907–1967) zeigte 1939 , daß für genügend große Zahlen immer 16 Biquadrate ausreichen, wobei die Schranke lag bei

$$\mathbf{10^{10^{89}}\,.}$$

Im Jahre 1985 konnten J.–M. Deshouillers, F. Dress und R. Balasubramanian diese Schranke auf

$$\mathbf{10^{340}}$$

herunterdrücken. Die restlichen Zahlen $\leq \mathbf{10^{340}}$ konnten dann mit Computer–Hilfe abgearbeitet werden, so daß schließlich im Jahre **1986** die Waring'sche Vermutung **bewiesen** war.

Auch alle anderen Werte von $g(k)$ sind in der Zwischenzeit bestimmt worden. Einige Beispiele:

k	$g(k)$	Jahr
2	4	**1770**
3	9	**1912**
4	19	**1986**
5	37	**1964**
6	73	**1940**

C) Die Pólya–Vermutung

Es bezeichnet $\Omega(n)$ die Anzahl aller Primteiler von $n \in \mathbb{N}$, wobei jeder Primteiler entsprechend seiner Vielfachheit gezählt wird. Man setzt:

$$E_n := \quad |\{\, k \,|\, 1 \leq k \leq n\,,\; \Omega(k) \text{ gerade}\,\}|$$

$$O_n := \quad |\{\, k \,|\, 1 \leq k \leq n\,,\; \Omega(k) \text{ ungerade}\,\}|$$

Es gilt immer $E_n + O_n = n$, und in allen ausgerechneten Beispielen stellte man $E_n \leq O_n$ für $n \geq 2$ fest. Der amerikanische Mathematiker **George Pólya (1887–1985)** stellte 1919 die folgende Vermutung auf:

$$\boxed{E_n \;\leq\; O_n \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; n \geq 2)}$$

Haselgrove konnte 1958 beweisen, daß es unendlich viele Zahlen n gibt , für die

$$O_n \;<\; E_n$$

gilt. Das kleinste Gegenbeispiel wurde 1962 von R.S.Lehman gefunden:

$$n \;=\; 906\,180\,359\,.$$

Hierfür gilt

$$O_n \;=\; E_n - 1\,.$$

Dieses Beispiel zeigt sehr eindrücklich, wie wichtig eine Beweismethode wie die vollständige Induktion ist, um Aussagen für **alle** natürlichen Zahlen zu beweisen.