§17. Die Fermat'sche Vermutung

Fermat schrieb im Jahre 1637 bei der Lektüre des Buches "Arithmetica" von Diophantos (in der lateinischen Übersetzung von Bachet, 1621) neben den Satz des Pythagoras die folgende Anmerkung auf den Rand seines Exemplares (damals in lateinischer Sprache):

> Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere. Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

> Es ist unmöglich, einen Kubus in zwei Kuben zu zerlegen, oder ein Biquadrat in zwei Biquadrate, oder allgemein irgendeine Potenz größer als die zweite in Potenzen gleichen Grades. Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis gefunden, doch ist der Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen.

Formelmäßig: Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gibt es keine ganzen Zahlen $x, y, z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit

$$x^n + y^n = z^n .$$

Die mehr als dreieinhalb Jahrhunderte dauernden Bemühungen vieler Mathematiker, die Fermat'sche Vermutung zu beweisen, haben ganz bedeutende Impulse für die Weiterentwicklung der Mathematik gegeben.

Die Fermat'sche Vermutung wurde 1994 von Andrew Wiles mit tiefliegenden Methoden aus der algebraischen Zahlentheorie und der algebraischen Geometrie bewiesen.

Es bezeichne $F(n)$ die n–te Fermat'sche Gleichung ($n \in \mathbb{N}$)

$$F(n) \;:\; x^n + y^n \;=\; z^n \,.$$

Die Fermat'sche Vermutung besagt also, daß $F(n)$ für alle $n \geq 2$ nur eine triviale Lösung besitzt. Für den Nachweis der Richtigkeit der Fermat'schen Vermutung, genügt es, diese für 4 und $p > 2$ zu beweisen, genauer:

(17.8) SATZ: Die Fermat'sche Vermutung ist richtig, wenn folgendes gilt:

i) $F(4)$ besitzt nur eine triviale Lösung

ii) $F(p)$ besitzt für jede ungerade Primzahl p nur eine triviale Lösung.

Erste Beweise:

	Jahr	bewiesen von
$n = 4$		Fermat (entdeckt von Euler unter den Randnotizen von Fermat)
$n = 3$	1753	Euler (der Beweis wurde später von Legendre richtiggestellt)
$n = 5$	1823	Legendre/Dirichlet
$n = 7$	1839	Gabriel Lamé
$n = p$ regulär	1846	Eduard Kummer zeigt, daß die Gleichung $F(p)$ nur trivial lösbar ist, wenn p eine reguläre Primzahl ist (dabei heißt eine Primzahl p **regulär**, wenn der Ring $\mathbb{Z}[\xi_p]$ faktoriell ist, wobei ξ_p eine primitive p–te Einheitswurzel ist).
	1847	Chauchy und Lamé kündigen unabhängig voneinander an, daß sie der Academie einen vollständigen Beweis vorlegen werden (was aber nie geschah)