Kap. I : Teilbarkeit in $\mathbb{Z}$

§ 1. Die geordnete Menge $(\mathbb{Z}, \leq)$

Bezeichnungen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen ≥ 1
$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ Menge der ganzen Zahlen

Die grundlegenden Eigenschaften der natürlichen Zahlen sind in den Peano–Axiomen (Giuseppe Peano, 1858–1932) zusammengestellt:

(1.1) Die PEANO–Axiome für die natürlichen Zahlen (1889):

P$_1$) 0 ist eine natürliche Zahl

P$_2$) Jede natürliche Zahl n besitzt eine natürliche Zahl n' als **Nachfolger**

P$_3$) 0 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl

P$_4$) Haben zwei natürliche Zahlen denselben Nachfolger, so sind siegleich

P$_5$) **Induktionsprinzip**
Eine Menge T natürlicher Zahlen, die 0 enthält und mit jeder Zahl auch deren Nachfolger, enthält **alle** natürlichen Zahlen.

Das Induktionsprinzip ist die Grundlage für den Beweis durch vollständige Induktion:

(1.2) Beweis durch vollständige Induktion

$A(n)$ sei eine Aussage in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}_0$. Es gelte

i) $A(0)$ ist richtig,

ii) $\forall\, n \in \mathbb{N}_0 : A(n)$ wahr $\Longrightarrow$ $A(n+1)$ wahr.

Dann ist $A(n)$ für **alle** natürlichen Zahlen $n \in N_0$ richtig.

(1.3) DEF: Eine Relation $\preceq$ auf einer nichtleeren Menge M heißt eine **Ordnungsrelation auf *M***, wenn gilt:

O$_1$) $\forall\, x \in M \,:\, x \preceq x$ (d.h. $\preceq$ ist **reflexiv**)

O$_2$) $\forall\, x, y \in M \,:\, x \preceq y$ und $y \preceq x \implies x = y$ (d.h. $\preceq$ ist **antisymmetrisch**)

O$_3$) $\forall\, x, y, z \in M \,:\, x \preceq y$ und $y \preceq z \implies x \preceq z$ (d.h. $\preceq$ ist **transitiv**).

$(M, \preceq)$ heißt dann eine **geordnete Menge**.

Gilt zusätzlich

O$_4$) $\forall\, x, y \in M \,:\, x \preceq y$ oder $y \preceq x$,

so heißt $\preceq$ eine **lineare Ordungsrelation auf *M*** und $(M, \preceq)$ eine **linear geordnete Menge**.

(1.5) DEF: $(M, \preceq)$ sei eine geordnete Menge und $T \subseteq M$ eine nichtleere Teilmenge.

a) Ein Element $o \in M$ heißt eine **obere Schranke von *T***, wenn gilt: $\forall\, t \in T \,:\, t \preceq o$.

Besitzt T eine obere Schranke, so heißt T **nach oben beschränkt**.

b) Ein Element $g \in M$ heißt **größtes Element von *T***, wenn gilt:

1) $g \in T$ und **2)** $\forall\, t \in T \,:\, t \preceq g$. Bezeichnung: $g = \max(T)$.

c) Ein Element $u \in M$ heißt eine **untere Schranke von *T***, wenn gilt: $\forall\, t \in T \,:\, u \preceq t$.

Besitzt T eine untere Schranke, so heißt T **nach unten beschränkt**.

b) Ein Element $k \in M$ heißt **kleinstes Element von *T***, wenn gilt:

1) $k \in T$ und **2)** $\forall\, t \in T \,:\, k \preceq t$. Bezeichnung: $k = \min(T)$.

(1.7) SATZ: In einer linear geordneten Menge $(M, \preceq)$ besitzt jede nichtleere endliche Teilmenge ein kleinstes und ein größtes Element.

(1.8) KOROLLAR: In $(\mathbb{Z}, \leq)$ besitzt jede nichtleere endliche Teilmenge ein kleinstes und ein größtes Element.

(1.9) SATZ: Sei $T \subseteq \mathbb{Z}$ eine nichtleere Teilmenge. Dann gilt:

a) T besitzt genau dann ein größtes Element, wenn T nach oben beschränkt ist.

b) T besitzt genau dann ein kleinstes Element, wenn T nach unten beschränkt ist.

(1.10) SATZ: Wohlordnung von $(\mathbb{N}_0, \leq)$

Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ besitzt ein kleinstes Element.

(1.11) BEM: a) Allgemein heißt eine geordnete Menge $(M, \preceq)$ **wohlgeordnet**, wenn jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element enthält.

b) Die vorherigen Überlegungen zeigen, daß sich die Wohlordnung von $(\mathbb{N}_0, \leq)$ aus den Peano–Axiomen herleiten läßt.

Im folgenden soll umgekehrt aus der Wohlordnung von $(\mathbb{N}_0, \leq)$ das Induktionsprinzip bewiesen werden.

(1.12) BEM: Mit Hilfe der Wohlordnung von $(\mathbb{N}_0, \leq)$ läßt sich beweisen:

Sei $m \in \mathbb{N}_0$ fest. Für die Teilmenge $T \subseteq \mathbb{N}_{\geq m} := \{n \mid n \in \mathbb{N}_0, n \geq m\}$ gelte:

a) $m \in T$

b) $\forall\, t \in \mathbb{N}_{\geq m} \,:\, t \in T \implies t+1 \in T$.

Dann folgt $T = \mathbb{N}_{\geq m}$.

(1.13) Beweis durch vollständige Induktion (1. Variante)

$A(n)$ sei eine Aussage in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}_0$. Ferner sei $m \in \mathbb{N}_0$ eine feste Zahl. Es gelte

i) $A(m)$ ist richtig,

ii) $\forall\, n \in \mathbb{N}_0, n \geq m \,:\, A(n)$ wahr $\implies A(n+1)$ wahr.

Dann ist $A(n)$ für **alle** natürlichen Zahlen $n \geq m$ richtig.

(1.14) Beweis durch vollständige Induktion (2. Variante)

$A(n)$ sei eine Aussage in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}_0$. Ferner sei $m \in \mathbb{N}_0$ eine feste Zahl. Es gelte

i) $A(m)$ ist richtig,

ii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq m$ folgt aus der Richtigkeit der Aussagen $A(m), A(m+1), A(m+2), \ldots, A(n)$ die Richtigkeit von $A(n+1)$.

Dann ist $A(n)$ für **alle** natürlichen Zahlen $n \geq m$ richtig.