7. Übungsblatt

ZAHLENTHEORIE (SS 2007)

Abgabe: Mi. 30.5.2007, bis 9.10 Uhr

Fach Nr. 11 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Ihre Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Die folgenden Aufgaben sind auf Grundlage der Vorlesung und der Übungen zu bearbeiten!

26. Aufgabe: Bestimme ohne Computer–Hilfe alle Primitivwurzeln

a) modulo 17 **b)** modulo 81 . (4)

27. Aufgabe: Sei $p > 3$ eine Primzahl. $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\} \subseteq \{1, 2, \ldots, p-1\}$ sei die Menge aller modulo p paarweise inkongruenter Primitivwurzeln modulo p. Beweise: $\prod_{i=1}^{r} a_i \equiv 1 \pmod{p}$. Was gilt im Falle $p \le 3$? (2)

28. Aufgabe: a) Seien $a \in \mathbb{Z}$ und $p \in \mathbb{P}$ mit $p \nmid a$. Beweise: Gilt $\mathrm{ord}_p(a) = n \ge 2$ so folgt $\sum_{k=0}^{n-1} a^k \equiv 0 \pmod{p}$.

b) Für Primzahlen p und q und $k \in \mathbb{N}$ sei $V(k) := \{a \,|\, 1 \le a \le q^k , \mathrm{ord}_p(a) = q^k\}$. Berechne $\left(\sum_{a \in V(k)} a\right) \bmod p$. Das Ergebnis soll in $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ liegen! (4)

29. Aufgabe: Sei $F_n := 2^{2^n} + 1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ die n–te Fermat'sche Zahl. Beweise: Für jeden Primteiler p von F_n gilt $\mathrm{ord}_p(2) = 2^{n+1}$. (2)

30. Aufgabe: f sei eine multiplikative zahlentheoretische Funktion $\neq o$. Für $m, n \in \mathbb{N}$ seien $g := \mathrm{ggT}(m, n)$ und $k := \mathrm{kgV}(m, n)$. Beweise: $f(g) \cdot f(k) = f(m) \cdot f(n)$. (2)

Wenn Sie mit dem **Korrektor** Andreas Kottmann sprechen wollen, schicken Sie ihm bitte eine email an die Adresse kottmann@zitmail.uni-paderborn.de