5. Übungsblatt

ZAHLENTHEORIE (SS 2007)

Abgabe: Mi. 16.5.2007, bis 9.10 Uhr

Fach Nr. 11 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Ihre Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Die folgenden Aufgaben sind auf Grundlage der Vorlesung und der Übungen zu bearbeiten!

17. Aufgabe: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\rho(n) := \prod_{t \mid n} t$ das Produkt über alle positiven Teiler von n.

a) Beweise: $\rho(n) = n^{\frac{\tau(n)}{2}} \quad (\forall\, n \in \mathbb{N})$

b) Untersuche, ob die Funktion $\rho : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}\,,\; n \longmapsto \rho(n)$, multiplikativ ist.

c) Eine natürliche Zahl n heißt **multiplikativ vollkommen**, wenn $\rho(n) = n^2$ gilt. Welches ist die kleinste multiplikativ vollkommene Zahl > 1? (Welches ist die kleinste vollkommene Zahl?)

d) Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Beweise die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1) n ist multiplikativ vollkommen

2) $\tau(n) = 4$

3) n ist entweder das Produkt zweier verschiedener Primzahlen oder die dritte Potenz einer Primzahl. (5)

18. Aufgabe: Welche bekannte zahlentheoretische Funktion ist $\varphi \star \tau$? (Beweis!) (2)

19. Aufgabe: Sei f das Inverse von φ bzgl. der Faltung. Berechne $f(n)$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$.
Hinweis: Berechne zunächst $f(p^k)$ für $p \in \mathbb{P}$ und $k \in \mathbb{N}$. (3)

20. Aufgabe: Für Funktionen $f, g \in \mathcal{A}$ sei das **Produkt** $f \cdot g \in \mathcal{A}$ argumentweise definiert durch $(f \cdot g)(n) := f(n) \cdot g(n)$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$. Beweise:

a) Sind f und g multiplikativ, so ist auch das Produkt $f \cdot g$ multiplikativ.

b) $\sigma \star \varphi = I \cdot \tau$. (4)

Wenn Sie mit dem **Korrektor** Andreas Kottmann sprechen wollen, schicken Sie ihm bitte eine email an die Adresse

kottmann@zitmail.uni-paderborn.de