4. Übungsblatt

ZAHLENTHEORIE (SS 2007)

Abgabe: Mi. 9.5.2007, bis 9.10 Uhr

Fach Nr. 11 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/~ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Ihre Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Die folgenden Aufgaben sind auf Grundlage der Vorlesung und der Übungen zu bearbeiten!

13. Aufgabe: Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $R_n := \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ die Menge der möglichen Reste bei Division durch n. Beweise: Für teilerfremde Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$R_{mn} \;=\; \{\,(lm + kn) \bmod (mn) \,|\, l \in R_n\,,\, k \in R_m\,\}\,.$$

(2)

14. Aufgabe: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $t \in T^+(n)$ sei

$$C_t := \{\, r \,|\, r \in \mathbb{N}, 1 \le r \le n, \mathrm{ggT}(r, n) = t\,\}\,.$$

Beweise: **a)** $C_t \neq \emptyset$ **b)** $C_s \cap C_t = \emptyset$ für $s \neq t$ **c)** $\bigcup\limits_{t\,|\,n} C_t \;=\; \{1, 2, \ldots, n\}$

d) $|\,C_t\,| \;=\; \varphi(\frac{n}{t})$ **e)** $\sum\limits_{t\,|\,n} \varphi(t) = n\,.$ (5)

15. Aufgabe: a) Beweise die Assoziativität der Faltung.

b) Welche bekannte zahlentheoretische Funktion ist $1\!\!1 \star \mathrm{I}$? (Begründung!)
Hierbei bezeichne $1\!\!1$ die Einsfunktion ($n \longmapsto 1\ \forall\, n \in \mathbb{N}$) und I die Identität ($n \longmapsto n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$).

c) Untersuche, ob die Funktionen σ oder φ vollständig multiplikativ sind. (4)

16. Aufgabe: a) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ Zahlen, die nicht teilerfremd sind. Ferner sei P das Produkt der verschiedenen Primteiler von $\mathrm{ggT}(m, n)$. Beweise:

$$\varphi(m \cdot n) \cdot \varphi(P) \;=\; \varphi(m) \cdot \varphi(n) \cdot P\,.$$

b) Sei $n \geq 3$ eine ungerade natürliche Zahl und r die Anzahl der verschiedenen Primteiler von n. Beweise: $2^r \,|\, \varphi(n)$. (3)

Wenn Sie mit dem **Korrektor** Andreas Kottmann sprechen wollen, schicken Sie ihm bitte eine email an die Adresse

kottmann@zitmail.uni-paderborn.de