3. Übungsblatt

ZAHLENTHEORIE (SS 2007)

Abgabe: Mi. 2.5.2007, bis 9.10 Uhr

Fach Nr. 11 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen und Matrikel–Nr.
Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Die folgenden Aufgaben sind auf Grundlage der Vorlesung und der Übungen zu bearbeiten!

9. Aufgabe: Beweise:

a) Ist $n \in \mathbb{N}\,, n \geq 2\,,$ so ist von n aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen genau eine durch n teilbar.

b) Von drei aufeinanderfolgenden ungeraden ganzen Zahlen ≥ 5 ist mindestens eine zusammengesetzt. (3)

10. Aufgabe: Beweise für die Teilersummenfunktion σ :

a) $\sigma(p^k) \;=\; \dfrac{p^{k+1}-1}{p-1} \quad (p \in \mathbb{P}\,,\; k \in \mathbb{N})$

b) Sind p und q zwei verschiedene Primzahlen, so gilt $\sigma(p^k \cdot q^l) = \sigma(p^k) \cdot \sigma(q^l) \quad (k, l \in \mathbb{N})$

c) σ ist multiplikativ. (3)

11. Aufgabe: Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweise:

a) $a \bmod n \;=\; b \bmod n \quad \Longleftrightarrow \quad n \,|\, (a-b)$

b) Aus $ac \bmod n \;=\; bc \bmod n$ und $\mathrm{ggT}(c, n) = 1$ folgt $a \bmod n \;=\; b \bmod n\,.$ (3)

12. Aufgabe: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $p \in \mathbb{P}$. Beweise:

a) p teilt den Binomialkoeffizienten $\binom{p}{k}$ für alle $k = 1, 2, \ldots, p-1\,.$

b) $(a+b)^p \bmod p \;=\; (a^p + b^p) \bmod p$

c) Beweise durch vollständige Induktion nach n : $\quad p \,|\, (n^p - n) \quad (\forall\, n \in \mathbb{N})$

d) Leite aus c) her: $\quad p \,|\, (a^p - a) \quad (\forall\, a \in \mathbb{Z})\,.$

e) Leite aus d) her: $\quad a \in \mathbb{Z} \wedge p \not| \, a \quad \Longrightarrow \quad a^{p-1} \bmod p \;=\; 1\,.$ (5)

Wenn Sie mit dem **Korrektor** Andreas Kottmann sprechen wollen, schicken Sie ihm bitte eine email an die Adresse

kottmann@zitmail.uni-paderborn.de