2. Übungsblatt

ZAHLENTHEORIE (SS 2007)

Abgabe: Mi. 25.4.2007, bis 9.10 Uhr

Fach Nr. 11 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/~ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen und Matrikel–Nr.
Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Die folgenden Aufgaben sind auf Grundlage der Vorlesung und der Übungen zu bearbeiten!

5. Aufgabe: Seien $a, m, n \in \mathbb{N}$ und $a > 1$. Beweise: $(a^m - 1) \,|\, (a^n - 1) \quad \Longrightarrow \quad m \,|\, n$.
Hinweis: Im Falle $n = mq + r$ gilt $a^n - 1 = (a^{mq} - 1)\, a^r + a^r - 1$ (Wieso?) (2)

6. Aufgabe: Für $n \in \mathbb{N}$ ist die n–te Mersenne'sche Zahl M_n definiert durch $M_n := 2^n - 1$.
Beweise:

a) Sind $m, n \in \mathbb{N}$, so gilt: $M_m \,|\, M_n \quad \Longleftrightarrow \quad m \,|\, n$.

b) $M_n \in \mathbb{P} \quad \Longrightarrow \quad n \in \mathbb{P}$.

c) Untersuche, ob in b) auch die Umkehrung gilt.

d) Finde einen Zusammenhang zwischen dem ggT zweier Mersenne'scher Zahlen M_m und M_n und dem ggT von m und n und beweise ihn. (6)

7. Aufgabe: Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Beweise:

a) Durch die Zuordnungsvorschrift $(s, t) \longmapsto s \cdot t$ wird eine Abbildung

$$f : T^+(m) \times T^+(n) \longrightarrow T^+(m \cdot n)$$

definiert.

b) f ist surjektiv.

c) Finde eine notwendige und hinreichende Bedingung für m und n, so daß die Abbildung f injektiv ist, und beweise die Richtigkeit Deiner Behauptung.

d) Für teilerfremde Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $\tau(m \cdot n) = \tau(m) \cdot \tau(n)$. (5)

8. Aufgabe: Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Beweise: $\mathrm{ggT}(c \cdot a, c \cdot b) \; = \; |\, c \,| \cdot \mathrm{ggT}(a, b)$. (3)