12. Übungsblatt

ZAHLENTHEORIE (SS 2007)

Abgabe: Mi. 4.7.2007, bis 9.10 Uhr

Fach Nr. 11 (orangener Schrank bei D1.348)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/~ chris

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Ihre Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

Die folgenden Aufgaben sind auf Grundlage der Vorlesung und der Übungen zu bearbeiten!

47. Aufgabe: Beweise:

a) Sind $p_1, p_2, \ldots, p_r$ Primzahlen mit $p_i \equiv 1 \pmod 8$ für alle $i = 1, 2, \ldots, r$, so besitzt die Zahl $a := (p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r)^4 + 16$ einen Primteiler p mit $p \equiv 1 \pmod 8$ und $p \neq p_i$ für alle $i = 1, 2, \ldots, r$.

b) Es gibt unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv 1 \pmod 8$.

c) Es gibt unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv 5 \pmod 8$. (4)

48. Aufgabe: a) Sei $p > 3$ eine Primzahl, und sei $m := \frac{1}{2}(p-1)$. Beweise:

$$\left(\frac{3}{p}\right) = \prod_{k=1}^{m} \left(1 + 2\cos\left(\frac{4\pi k}{p}\right)\right).$$

b) Berechne $\left(\frac{3}{11}\right)$ und $\left(\frac{3}{19}\right)$ mit Hilfe von a). (3)

49. Aufgabe: Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Beweise, daß n genau dann eine Primzahl ist, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$ gibt mit $a^{n-1} \equiv 1 \pmod n$ und $a^{\frac{n-1}{p}} \not\equiv 1$ für alle $p \in T_{\mathbf{P}}(n-1)$. (1)

50. Aufgabe: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Beweise für die Fermat'sche Zahl F_n:

a) $F_n \equiv 5 \pmod{12}$ **b)** F_n prim $\iff 3^{2^{2^n-1}} \equiv -1 \pmod{F_n}$. (3)

51. Aufgabe: Sei $n > 6$ eine gerade vollkommene Zahl.

a) Iteriere die Quersummenbildung von n so oft, bis eine einziffrige Zahl $e(n)$ übrigbleibt. Bestimme $e(n)$ in 5 konkreten Beispielen und stelle eine Vermutung auf.

b) Beweise die in a) gefundene Vermutung. (3)

Wenn Sie mit dem **Korrektor** Andreas Kottmann sprechen wollen, schicken Sie ihm bitte eine email an die Adresse kottmann@zitmail.uni-paderborn.de