

**ZAHLENTHEORIE (SS 2007)****Abgabe: Mi. 4.7.2007, bis 9.10 Uhr****Fach Nr. 11 (orangener Schrank bei D1.348)****Internet:** <http://math-www.uni-paderborn.de/~chris>

Schreiben Sie bitte auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel-Nr. und Ihre Übungsgruppe. Heften Sie bitte die Seiten zusammen!

**Die folgenden Aufgaben sind auf Grundlage der Vorlesung und der Übungen zu bearbeiten!**

**47. Aufgabe:** Beweise:

a) Sind  $p_1, p_2, \dots, p_r$  Primzahlen mit  $p_i \equiv 1 \pmod{8}$  für alle  $i = 1, 2, \dots, r$ , so besitzt die Zahl  $a := (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r)^4 + 16$  einen Primteiler  $p$  mit  $p \equiv 1 \pmod{8}$  und  $p \neq p_i$  für alle  $i = 1, 2, \dots, r$ .

b) Es gibt unendlich viele Primzahlen  $p$  mit  $p \equiv 1 \pmod{8}$ .

c) Es gibt unendlich viele Primzahlen  $p$  mit  $p \equiv 5 \pmod{8}$ . (4)

**48. Aufgabe: a)** Sei  $p > 3$  eine Primzahl, und sei  $m := \frac{1}{2}(p-1)$ . Beweise:

$$\left(\frac{3}{p}\right) = \prod_{k=1}^m \left(1 + 2 \cos\left(\frac{4\pi k}{p}\right)\right).$$

b) Berechne  $\left(\frac{3}{11}\right)$  und  $\left(\frac{3}{19}\right)$  mit Hilfe von a). (3)

**49. Aufgabe:** Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Beweise, daß  $n$  genau dann eine Primzahl ist, wenn es eine Zahl  $a \in \mathbb{Z}$  gibt mit  $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$  und  $a^{\frac{n-1}{p}} \not\equiv 1$  für alle  $p \in T_{\mathbb{P}}(n-1)$ . (1)

**50. Aufgabe:** Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig. Beweise für die Fermat'sche Zahl  $F_n$ :

a)  $F_n \equiv 5 \pmod{12}$       b)  $F_n$  prim  $\iff 3^{\frac{2^n-1}{2}} \equiv -1 \pmod{F_n}$ . (3)

**51. Aufgabe:** Sei  $n > 6$  eine gerade vollkommene Zahl.

a) Iteriere die Quersummenbildung von  $n$  so oft, bis eine einziffrige Zahl  $e(n)$  übrigbleibt. Bestimme  $e(n)$  in 5 konkreten Beispielen und stelle eine Vermutung auf.

b) Beweise die in a) gefundene Vermutung. (3)

Wenn Sie mit dem **Korrektor** Andreas Kottmann sprechen wollen, schicken Sie ihm bitte eine email an die Adresse [kottmann@zitmail.uni-paderborn.de](mailto:kottmann@zitmail.uni-paderborn.de)