(2.19) DEF: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$ heißt **kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)** von a und b, wenn folgendes gilt:

i) $k \geq 0$

ii) $a \mid k$ und $b \mid k$

iii) $\forall v \in \mathbb{Z} \; : \; a \mid v$ und $b \mid v \implies k \mid v$

Bezeichnung: $k = \operatorname{kgV}(a, b)$.

(2.20) BEM: **a)** Zu je zwei ganzen Zahlen existiert höchstens ein kgV.

b) Ist $k = \operatorname{kgV}(a, b)$ und $v \neq 0$ ein gemeinsames Vielfaches, so folgt aus $k \mid v$, daß $k = |k| \leq |v|$ gilt, d.h. k ist das betragsmäßig kleinste gemeinsame Vielfache $\neq 0$.

(2.21) LEMMA: Für beliebige ganze Zahlen a und b gilt:

a) $\operatorname{kgV}(a, b) = \operatorname{kgV}(b, a)$

b) $\operatorname{kgV}(a, b) = \operatorname{kgV}(|a|, |b|)$

c) $\operatorname{kgV}(a, b) = |b| \iff a \mid b$

d) $\operatorname{kgV}(a, 0) = |0|$

e) $\operatorname{kgV}(a, b) = 0 \iff (a = 0 \vee b = 0)$

(2.22) SATZ: Zu je zwei ganzen Zahlen a und b existiert genau ein kgV, und es gilt

$$\operatorname{ggT}(a, b) \cdot \operatorname{kgV}(a, b) = |\, a \cdot b \,|$$

(2.23) BEM: (2.22) liefert zugleich ein Berechnungsverfahren für das kgV:

Im Falle $\operatorname{ggT}(a, b) \neq 0$ berechne den ggT mit Hilfe des **EA**. Dann ist

$$\operatorname{kgV}(a, b) = \frac{|\, a \cdot b \,|}{\operatorname{ggT}(a, b)}$$

(2.24) DEF: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ seien ganze Zahlen. Eine ganze Zahl k heißt **kgV** von $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (in Zeichen: $k = \operatorname{kgV}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$), wenn gilt:

i) $k \geq 0$

ii) $a_i | k$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$

iii) Für ein beliebiges $v \in \mathbb{Z}$ mit $a_i | v$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$ folgt $k | v$.