

§8 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Es sei $M \subseteq \mathbb{C}$ eine vorgegebene Menge von Punkten mit $0, 1 \in M$. Aus dieser Punktmenge konstruieren wir neue Punkte, wobei wir allerdings Zirkel und Lineal nur in einer genau vorgeschriebenen Art benutzen dürfen. Folgendes sind die **zulässigen Konstruktionsschritte**:

- I)** Mit dem **Lineal**: Das Ziehen einer Geraden durch zwei verschiedene Punkte von M
- II)** Mit dem **Zirkel**: Das Schlagen eines Kreises um einen Punkt von M als Mittelpunkt und mit dem Abstand zweier verschiedener Punkte aus M als Radius.

Neu konstruierte Punkte ergeben sich dann als Schnittpunkte zweier konstruierter Geraden, Kreise oder einer Geraden und eines Kreises.

(8.1) DEF: **a)** Mit $\mathcal{F}(M)$ werde die Menge aller Geraden und Kreise bezeichnet, die sich aus den Punkten von M mit Hilfe zulässiger Konstruktionsschritte konstruieren lassen.

b) Ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ heißt **aus M elementar konstruierbar**, wenn es $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(M)$ gibt mit $F_1 \neq F_2$ und $z \in F_1 \cap F_2$. Es bezeichne $\mathcal{K}_{el}(M)$ die Menge der aus M elementar konstruierbaren Punkte.

c) Ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ heißt **aus M konstruierbar**, wenn es endlich viele Punkte $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ gibt mit den Eigenschaften:

- 1)** $z_1 \in \mathcal{K}_{el}(M)$
- 2)** $z_{l+1} \in \mathcal{K}_{el}(M \cup \{z_1, z_2, \dots, z_l\}) \quad \forall l \in \{1, 2, \dots, n-1\}$
- 3)** $z = z_n$

d) Es bezeichne $\mathcal{K}(M)$ die Menge der aus M konstruierbaren Elemente.

(8.2) SATZ: Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ mit $0, 1 \in M$. Dann gilt:

a) Die Menge $\mathcal{K}(M)$ der aus M konstruierbaren Punkte von $\mathbb{C}$ ist ein Zwischenkörper der Körpererweiterung $\mathbb{C} : \mathbb{Q}$.

b) $z \in \mathcal{K}(M) \implies \sqrt{z} \in \mathcal{K}(M)$

c) $z \in \mathcal{K}(M) \implies \bar{z} \in \mathcal{K}(M)$

(8.3) BEM: Für $M \subseteq \mathbb{C}$ sei $\overline{M} := \{\bar{z} | z \in M\}$ und $M' := M \cup \overline{M}$. Dann gilt $\mathbb{Q}(M') \subseteq \mathcal{K}(M) \subseteq \mathbb{C}$.

(8.4) LEMMA: Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ mit $0, 1 \in M$ und $M' := M \cup \overline{M}$. Ist dann der Punkt $z \in \mathbb{C}$ aus $\overline{M}$ **elementar** konstruierbar, so sind z und $\bar{z}$ algebraisch über $\mathbb{Q}(M')$ vom Grade ≤ 2 .

(8.5) SATZ: Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ mit $0, 1 \in M$ und $M' := M \cup \overline{M}$. Dann sind für $z \in \mathbb{C}$ folgende Aussagen äquivalent:

- a) $z \in \mathcal{K}(M)$
- b) Es existiert eine Kette $\mathbb{Q}(M') = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_m \subseteq \mathbb{C}$ von Unterkörpern von $\mathbb{C}$ mit den Eigenschaften
 - i) $[K_j : K_{j-1}] \leq 2 \quad \forall j = 1, 2, \dots, m$
 - ii) $z \in K_m$.

(8.6) KOROLLAR: Ist $z \in \mathcal{K}(M)$, so ist z algebraisch über $\mathbb{Q}(M')$ und der Grad von z über $\mathbb{Q}(M')$ ist eine Zweierpotenz.

Die drei klassischen Probleme

Wir gehen von der Menge $M = \{0, 1\}$ aus. In diesem Falle ist $M' = M \subseteq \mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}(M') = \mathbb{Q}$.

(8.7) Das Delische Problem (Verdoppelung des Würfels)

Gegeben sei die konstruierbare Seitenlänge a eines Würfels. Ist es dann möglich, die Seitenlänge b eines Würfels mit dem doppelten Volumen (nur mit Zirkel und Lineal) zu konstruieren?

Antwort: Nein

(8.8) Die Quadratur des Kreises

Gegeben sei ein Kreis mit dem Radius r . Ist es dann möglich, die Seitenlänge a eines flächengleichen Quadrates (nur mit Zirkel und Lineal) zu konstruieren?

Antwort: Nein

(8.9) Die Dreiteilung eines beliebigen Winkels

Gegeben sei ein beliebiger konstruierbarer Winkel. Ist es dann möglich, diesen Winkel (nur mit Zirkel und Lineal) in drei gleichgroße Winkel zu teilen?

Antwort: I.a. Nein