§7 Algebraische Körpererweiterungen

(7.1) DEF: $L : K$ sei eine Körpererweiterung. Ein Element $\alpha \in L$ heißt **algebraisch über** K, wenn es ein von Null verschiedenes Polynom $f \in K[T]$ gibt mit $f(\alpha) = 0$. Ist $\alpha \in L$ nicht algebraisch über K, so heißt α **transzendent über** K.

(7.2) BEISPIELE: **a)** Jedes Element α aus dem Grundkörper K ist algebraisch über K; denn für $f = T - \alpha \in K[T]$ gilt $f \neq 0$ und $f(\alpha) = 0$.

b) Die reellen Zahlen $\sqrt[3]{2}, \sqrt[8]{11}$ sind algebraisch über $\mathbb{Q}$ $(T^3 - 2, T^8 - 11 \in \mathbb{Q}[T])$.

c) Die imaginäre Einheit $i \in \mathbb{C}$ ist algebraisch über $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ $(T^2 + 1 \in \mathbb{Q}[T])$.

d) $\pi \in \mathbb{R}$ ist transzendent über $\mathbb{Q}$ (Lindemann, 1882)

e) $e \in \mathbb{R}$ ist transzendent über $\mathbb{Q}$ (Hermite, 1873)

BEM: Es ist vergleichsweise schwieriger, transzendente Zahlen zu finden, obwohl Cantor im Jahre 1874 bewiesen hat, daß die Menge der über $\mathbb{Q}$ algebraischen Zahlen abzählbar, die Menge der transzendenten Zahlen jedoch überabzählbar ist.

(7.3) SATZ: $L : K$ sei eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$. Ist dann die Körpererweiterung $K(\alpha) : K$ endlich, so ist α algebraisch über K.

(7.4) SATZ: $L : K$ sei eine Körpererweiterung. Das Element $\alpha \in L$ sei algebraisch über K. Dann gilt:

a) Es gibt genau ein normiertes Polynom $m_\alpha \in K[T]$ kleinsten Grades mit α als Nullstelle.

b) Ist $g \in K[T] \setminus \{0\}$ ein beliebiges Polynom mit $g(\alpha) = 0$, so ist m_α ein Teiler von g.

c) m_α ist irreduzibel über K.

(7.5) DEF: Sei $L : K$ eine Körpererweiterung. $\alpha \in L$ sei algebraisch über K. Dann heißt das normierte Polynom $m_\alpha \in K[T]$ kleinsten Grades mit α als Nullstelle das **Minimalpolynom (abgekürzt MP) von** α **über** K.

Beispiele: $T^2 - 2 \in \mathbb{Q}[T]$ ist Minimalpolynom von $\sqrt{2}$ über $\mathbb{Q}$.

$T^3 - 7 \in \mathbb{Q}[T]$ ist Minimalpolynom von $\sqrt[3]{7}$ über $\mathbb{Q}$.

(7.6) KOROLLAR: $L : K$ sei eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$ sei algebraisch über K. Dann sind für ein Polynom $f \in K[T]$ folgende Aussagen äquivalent:

a) f ist das Minimalpolynom von α über K.

b) f ist ein normiertes, über K irreduzibles Polynom mit α als Nullstelle.

(7.7) SATZ: Seien $L : K$ eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$ ein Element. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $K[\alpha] = K(\alpha)$

b) α ist algebraisch über K .

c) $K[\alpha]$ ist ein Unterkörper von L .

Beispiele: $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}[\sqrt[n]{p}] = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{p})$ $(n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P})$, $\mathbb{R}(i) = \mathbb{R}[i] = \mathbb{C}$
$\mathbb{Q}[\pi] \subset \mathbb{Q}(\pi)$ (echte Inklusion)

(7.8) KOROLLAR: $L : K$ sei eine Körpererweiterung, und die Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ sei algebraisch über K . Dann gilt

$$K[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \;=\; K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

(7.9) SATZ: $L : K$ sei eine Körpererweiterung, und $\alpha \in L$ sei algebraisch über K. Das Minimalpolynom m_α von α über K habe den Grad n . Dann gilt:

a) $[K(\alpha) : K] \;=\; n \; (= \mathrm{grad}(m_\alpha))$

b) $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ ist eine K–Basis von $K(\alpha)$.

(7.10) KOROLLAR: $L : K$ sei eine einfache Körpererweiterung, und es gelte $L = K(\alpha)$ mit $\alpha \in L$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $L : K$ ist endlich

b) α ist algebraisch über K .

(7.11) DEF: $L : K$ sei eine Körpererweiterung, und $\alpha \in L$ sei algebraisch über K. Dann heißt

$$[K(\alpha) : K] \;=:\; \mathrm{grad}_K(\alpha)$$

der **Grad von α über** K .

(7.12) DEF: Eine Körpererweiterung $L : K$ heißt **algebraisch**, wenn jedes Element aus L algebraisch über K ist. $L : K$ heißt **transzendent**, wenn $L : K$ nicht algebraisch ist.

(7.13) SATZ: $L : K$ sei eine endliche Körpererweiterung. Dann gilt:

a) $L : K$ ist algebraisch

b) Für jedes $\alpha \in L$ ist $\mathrm{grad}_K(\alpha)$ ein Teiler von $[L : K]$.

(7.14) SATZ: Für eine Körpererweiterung $L : K$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $L : K$ ist endlich

b) Es gibt endlich viele über K algebraische Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ mit $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

(7.15) SATZ: E sei ein Zwischenkörper der Körpererweiterung $L : K$. Dann gilt:

$$L : K \text{ algebraisch} \quad \Longleftrightarrow \quad L : E \text{ algebraisch } \underline{\text{und}} \; E : K \text{ algebraisch.}$$