# Kap. II : Körpererweiterungen

## §6 Der Begriff der Körpererweiterung

Wir betrachten im folgenden die Situation, daß in einem Körper $L$ ein Unterkörper $K$ gegeben ist.

**(6.1) DEF:** Es sei $L$ ein Körper und $K \subseteq L$ ein Unterkörper. Dann heißt $L$ ein **Erweiterungskörper** von $K$, und man spricht von einer **Körpererweiterung (KE)** $L : K$ (lies: $L$ über $K$). Jeder Unterkörper $E$ mit $K \subseteq E \subseteq L$ heißt ein **Zwischenkörper (ZK)** der KE $L : K$.

**Beispiel:** $\mathbb{C} \supseteq \mathbb{R} \supseteq \mathbb{Q}$ , d.h. $\mathbb{C} : \mathbb{Q}$ ist eine KE mit ZK $\mathbb{R}$. $K$ und $L$ sind ZK von $L : K$.

**(6.2) BEM:** Ist $L : K$ eine Körpererweiterung, so ist $L$ ein Vektorraum über $K$.

**Bew:** $(L, +)$ ist eine abelsche Gruppe, und die Multiplikation von $L$ liefert die Skalarmultiplikation $K \times L \longrightarrow L$ mit den nötigen Eigenschaften.

**(6.3) DEF: a)** Sei $L : K$ eine Körpererweiterung . Dann heißt die Dimension von $L$ als $K$–Vektorraum der **Grad der Körpererweiterung** $L : K$ (in Zeichen: $[L : K] := \dim_K(L)$ ).

**b)** Eine Körpererweiterung heißt **endlich**, wenn ihr Grad endlich ist.

**Beispiele:** $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$ , $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$ , $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$

**(6.4) SATZ: (Gradsatz)** Es sei $E$ ein Zwischenkörper der Körpererweiterung $L : K$.

**a)** Sind $L : E$ und $E : K$ endliche Körpererweiterungen, so ist auch $L : K$ endlich, und es gilt

$$[L : K] \;=\; [L : E] \cdot [E : K]$$

**b)** Ist $L : K$ eine endliche Körpererweiterung, so sind auch die Körpererweiterungen $L : E$ und $E : K$ endlich.

**Bew: a)** Ist $B_1 := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ eine $E$–Basis von $L$ und ist $B_2 := \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ eine $K$–Basis von $E$, so ist

$$B := \{\alpha_i \cdot \beta_j \,|\, i = 1, 2, \ldots, m\,,\; j = 1, 2, \ldots, n\}$$

eine $K$–Basis von $L$. Hierbei gilt $|B_1| = m = [L : E]$ , $|B_2| = n = [E : K]$ und $[L : K] = |B| = m \cdot n = [L : E] \cdot [E : K]$.

**b)** $E$ ist als Unterraum des $K$–Vektorraumes $L$ endlichdimensional. Eine $K$–Basis von $L$ ist auch ein EZS des $E$–Vektorraumes $L$, enthält also eine $E$-Basis von $L$, so daß $[L : E]$ endlich ist. •

$$\boxed{\overbrace{\underbrace{L \supseteq}_{[L:E]} E \underbrace{\supseteq K}_{[E:K]}}^{[L:K]}}$$

**(6.5) KOROLLAR:** $L : K$ sei eine endliche Körpererweiterung.

**a)** Für jeden Zwischenkörper $E$ von $L : K$ sind $[E : K]$ und $[L : E]$ Teiler von $[L : K]$ .

**b)** Ist $[L : K]$ eine Primzahl, so besitzt die Körpererweiterung $L : K$ keinen echten Zwischenkörper.

**Beispiel:** $\mathbb{C} : \mathbb{R}$ besitzt keinen echten ZK.

**(6.6) DEF:** Sei $L : K$ eine Körpererweiterung und $M \subseteq L$ eine beliebige Teilmenge.

**a)** Es bezeichne $K(M)$ den Durchschnitt aller Unterkörper von $L$, die $K \cup M$ umfassen. $K(M)$ heißt der **von $K \cup M$ erzeugte Unterkörper von** $L$. Man sagt, daß $K(M)$ durch **Körperadjunktion** von $M$ zu $K$ entsteht.

**b)** Es bezeichne $K[M]$ den Durchschnitt aller Unterringe von $L$, die $K \cup M$ umfassen. $K[M]$ heißt der **von $K \cup M$ erzeugte Unterring von** $L$. Man sagt, daß $K[M]$ durch **Ringadjunktion** von $M$ zu $K$ entsteht.

**c)** Im Falle $M = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq L$ setzt man $K(M) =: K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $K[M] =: K[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$.

**(6.7) SATZ:** Seien $L : K$ eine Körpererweiterung , $M \subseteq L$ eine beliebige Teilmenge und $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$. Dann gilt:

**a$_1$)** $K[M]$ ist der kleinste Unterring von $L$, der $K \cup M$ umfaßt.

**a$_2$)** $K(M)$ ist der kleinste Unterkörper von $L$, der $K \cup M$ umfaßt.

**b)** $K \subseteq K \cup M \subseteq K[M] \subseteq K(M) \subseteq L$

**c$_1$)** $K[\alpha] = \{ f(\alpha) \mid f \in K[T] \}$ **c$_2$)** $K(\alpha) = \left\{ \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \,\middle|\, f, g \in K[T], g(\alpha) \neq 0 \right\}$

**d$_1$)** $K[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \{ f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid f \in K[T_1, \ldots, T_n] \}$

**d$_2$)** $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \left\{ \frac{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \,\middle|\, f, g \in K[T_1, \ldots, T_n], g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0 \right\}$

**(6.8) DEF:** Eine Körpererweiterung $L : K$ heißt **einfach**, wenn es ein Element $\alpha \in L$ gibt mit der Eigenschaft $L = K(\alpha)$ . $\alpha$ heißt dann ein **primitives Element** der Körpererweiterung $L : K$ .

**(6.9) BEISPIEL:** $L := \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist eine einfache Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ mit $\sqrt{2}$ als primitivem Element. Es gilt nach (6.7c$_2$)

$$\begin{aligned} L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) &= \left\{ \frac{f(\sqrt{2})}{g(\sqrt{2})} \,\middle|\, f, g \in \mathbb{Q}[T], g(\sqrt{2}) \neq 0 \right\} \\ &= \left\{ h(\sqrt{2}) \,\middle|\, h \in \mathbb{Q}[T] \right\} = \{ r + s\sqrt{2} \mid r, s \in \mathbb{Q} \} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \end{aligned}$$

Der Grund hierfür ist die Tatsache $(\sqrt{2})^2 = 2$ oder anders ausgedrückt: $\sqrt{2}$ ist Nullstelle des Polynoms $T^2 - 2 \in \mathbb{Q}[T]$. Solche Elemente werden wir algebraisch nennen.