Kap. II : Körpererweiterungen

§6 Der Begriff der Körpererweiterung

Wir betrachten im folgenden die Situation, daß in einem Körper L ein Unterkörper K gegeben ist.

(6.1) DEF: Es sei L ein Körper und $K \subseteq L$ ein Unterkörper. Dann heißt L ein **Erweiterungskörper** von K, und man spricht von einer **Körpererweiterung (KE)** $L : K$ (lies: L über K). Jeder Unterkörper E mit $K \subseteq E \subseteq L$ heißt ein **Zwischenkörper (ZK)** der KE $L : K$.

Beispiel: $\mathbb{C} \supseteq \mathbb{R} \supseteq \mathbb{Q}$, d.h. $\mathbb{C} : \mathbb{Q}$ ist eine KE mit ZK $\mathbb{R}$. K und L sind ZK von $L : K$.

(6.2) BEM: Ist $L : K$ eine Körpererweiterung, so ist L ein Vektorraum über K.

Bew: $(L, +)$ ist eine abelsche Gruppe, und die Multiplikation von L liefert die Skalarmultiplikation $K \times L \longrightarrow L$ mit den nötigen Eigenschaften.

(6.3) DEF: a) Sei $L : K$ eine Körpererweiterung . Dann heißt die Dimension von L als K–Vektorraum der **Grad der Körpererweiterung** $L : K$ (in Zeichen: $[L : K] := \dim_K(L)$).

b) Eine Körpererweiterung heißt **endlich**, wenn ihr Grad endlich ist.

Beispiele: $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$, $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$, $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$

(6.4) SATZ: (Gradsatz) Es sei E ein Zwischenkörper der Körpererweiterung $L : K$.

a) Sind $L : E$ und $E : K$ endliche Körpererweiterungen, so ist auch $L : K$ endlich, und es gilt

$$[L : K] \ = \ [L : E] \cdot [E : K]$$

b) Ist $L : K$ eine endliche Körpererweiterung, so sind auch die Körpererweiterungen $L : E$ und $E : K$ endlich.

Bew: a) Ist $B_1 := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ eine E–Basis von L und ist $B_2 := \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ eine K–Basis von E, so ist

$$B := \ \{\alpha_i \cdot \beta_j \,|\, i = 1, 2, \ldots, m \,,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$$

eine K–Basis von L. Hierbei gilt $|B_1| = m = [L : E]$, $|B_2| = n = [E : K]$ und $[L : K] = |B| = m \cdot n = [L : E] \cdot [E : K]$.

b) E ist als Unterraum des K–Vektorraumes L endlichdimensional. Eine K–Basis von L ist auch ein EZS des E–Vektorraumes L, enthält also eine E-Basis von L, so daß $[L : E]$ endlich ist. •

$$\boxed{\overbrace{\underbrace{L \ \supseteq}_{[L:E]} E \underbrace{\supseteq \ K}_{[E:K]}}^{[L:K]}}$$

(6.5) KOROLLAR: $L : K$ sei eine endliche Körpererweiterung.

a) Für jeden Zwischenkörper E von $L : K$ sind $[E : K]$ und $[L : E]$ Teiler von $[L : K]$.

b) Ist $[L : K]$ eine Primzahl, so besitzt die Körpererweiterung $L : K$ keinen echten Zwischenkörper.

Beispiel: $\mathbb{C} : \mathbb{R}$ besitzt keinen echten ZK.

(6.6) DEF: Sei $L : K$ eine Körpererweiterung und $M \subseteq L$ eine beliebige Teilmenge.

a) Es bezeichne $K(M)$ den Durchschnitt aller Unterkörper von L, die $K \cup M$ umfassen. $K(M)$ heißt der **von** $K \cup M$ **erzeugte Unterkörper von** L. Man sagt, daß $K(M)$ durch **Körperadjunktion** von M zu K entsteht.

b) Es bezeichne $K[M]$ den Durchschnitt aller Unterringe von L, die $K \cup M$ umfassen. $K[M]$ heißt der **von** $K \cup M$ **erzeugte Unterring von** L. Man sagt, daß $K[M]$ durch **Ringadjunktion** von M zu K entsteht.

c) Im Falle $M = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq L$ setzt man $K(M) =: K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $K[M] =: K[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$.

(6.7) SATZ: Seien $L : K$ eine Körpererweiterung , $M \subseteq L$ eine beliebige Teilmenge und $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$. Dann gilt:

a$_1$) $K[M]$ ist der kleinste Unterring von L, der $K \cup M$ umfaßt.

a$_2$) $K(M)$ ist der kleinste Unterkörper von L, der $K \cup M$ umfaßt.

b) $K \subseteq K \cup M \subseteq K[M] \subseteq K(M) \subseteq L$

c$_1$) $K[\alpha] = \{\, f(\alpha) \mid f \in K[T] \,\}$ **c$_2$)** $K(\alpha) = \left\{ \dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \,\middle|\, f, g \in K[T], g(\alpha) \neq 0 \right\}$

d$_1$) $K[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \{\, f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid f \in K[T_1, \ldots, T_n] \,\}$

d$_2$) $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \left\{ \dfrac{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \,\middle|\, f, g \in K[T_1, \ldots, T_n], g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0 \right\}$

(6.8) DEF: Eine Körpererweiterung $L : K$ heißt **einfach**, wenn es ein Element $\alpha \in L$ gibt mit der Eigenschaft $L = K(\alpha)$. α heißt dann ein **primitives Element** der Körpererweiterung $L : K$.

(6.9) BEISPIEL: $L := \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist eine einfache Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ mit $\sqrt{2}$ als primitivem Element. Es gilt nach (6.7c$_2$)

$$\begin{aligned} L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) &= \left\{ \frac{f(\sqrt{2})}{g(\sqrt{2})} \,\middle|\, f, g \in \mathbb{Q}[T], g(\sqrt{2}) \neq 0 \right\} \\ &= \left\{ h(\sqrt{2}) \,\middle|\, h \in \mathbb{Q}[T] \right\} = \{\, r + s\sqrt{2} \mid r, s \in \mathbb{Q} \,\} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \end{aligned}$$

Der Grund hierfür ist die Tatsache $(\sqrt{2})^2 = 2$ oder anders ausgedrückt: $\sqrt{2}$ ist Nullstelle des Polynoms $T^2 - 2 \in \mathbb{Q}[T]$. Solche Elemente werden wir algebraisch nennen.