C) Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$

$(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ ist ein archimedisch angeordneter Körper, d.h. ein angeordneter Körper, in dem es zu jedem Element $q \in \mathbb{Q}$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $q < n$. Wir stellen allerdings folgende "Mängel" fest:

I) Es gibt nichtleere, nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{Q}$, die kein Supremum in $\mathbb{Q}$ besitzen (d.h. $(\mathbb{Q}, \leq)$ ist nicht vollständig geordnet). Ein Beispiel ist

$$T := \{\, x \mid x \in \mathbb{Q}\,,\ x^2 < 2 \,\}\,.$$

Ein Supremum $s \in \mathbb{Q}$ von T müßte $s^2 = 2$ erfüllen, also eine Quadratwurzel aus 2 sein.

II) Es gibt Cauchy–Folgen rationaler Zahlen, die keinen Grenzwert in $\mathbb{Q}$ besitzen.

Def: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen heißt eine **Cauchy–Folge**, wenn gilt:
Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ mit $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß gilt:

$$\forall\, m, n \in \mathbb{N} \,:\, m, n \geq n_0(\varepsilon) \quad\Longrightarrow\quad |\, a_m - a_n \,| < \varepsilon\,.$$

Beispiel: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die rekursiv definiert ist durch

$$x_1 := 1 \quad , \quad x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \qquad (n \geq 2)$$

ist zwar eine Cauchy–Folge rationaler Zahlen, ist allerdings nicht konvergent: für einen Grenzwert $g \in \mathbb{Q}$ dieser Folge müßte $g^2 = 2$ gelten, was unmöglich ist.

(2.14) SATZ: Es gilt:

a) Die Menge $\mathcal{CF}$ aller Cauchy–Folgen rationaler Zahlen ist ein kommutativer Ring.

b) Die Teilmenge $\mathcal{N}$ aller Nullfolgen ist ein Ideal in $\mathcal{CF}$.

c) Der Faktorring

$$\mathbb{R} \;:=\; \mathcal{CF}/\mathcal{N}$$

ist ein Körper, der sog. **Körper der reellen Zahlen**.

(2.15) BEM: **a)** $\mathbb{R}$ läßt sich äquivalent als Quotientenmenge $\mathcal{CF}/\rho$ bilden, wobei ρ die durch

$$(a_n)\,\rho\,(b_n) \quad :\Longleftrightarrow \quad (a_n - b_n) \ \text{ ist eine Nullfolge}$$

definierte Äquivalenzrelation auf $\mathcal{CF}$ ist.

b) Die Abbildung $\alpha : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, $q \longmapsto [\,(q)\,]_{\mathcal{N}}$, ist ein injektiver Ringhomomorphismus (hierbei ist (q) die konstante Folge $(q, q, q, q, \ldots)$), so daß wir durch Identifizierung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ erhalten.

c) Auf $\mathbb{R}$ läßt sich eine lineare Ordnungsrelation $\leq$ definieren, so daß $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ zu einem vollständig angeordneten Körper wird. Jede Cauchy–Folge reeller Zahlen ist dann konvergent, und jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremeum in $\mathbb{R}$.

d) Jede reelle Zahl ist Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen.

e) Bis auf Isomorphie ist $\mathbb{R}$ der einzige vollständig angeordnete Körper.

f) Während $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ alle gleichmächtig sind (abzählbar unendlich sind), sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ nicht mehr gleichmächtig. $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

g) Andere Möglichkeiten für die Konstruktion von $\mathbb{R}$ benutzen **Dedekind'sche Schnitte** oder **Intervallschachtelungen**.

D) Konstruktion von $\mathbb{C}$ aus $\mathbb{R}$

Der Körper der reellen Zahlen hat den "Mangel", daß es Polynome über $\mathbb{R}$ gibt, die keine Nullstellen in $\mathbb{R}$ haben (z.B. das Polynom $T^4 + 1 \in \mathbb{R}[T]$). Dies äußert sich insbesondere in der Tatsache, daß man nicht immer Wurzeln aus einer rellen Zahl ziehen kann.

(2.16) SATZ: **a)** Der Faktorring

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}[T]/(T^2 + 1)$$

ist ein Körper.

b) Die Abbildung $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $r \longmapsto [r]$, ist ein (injektiver) Körperhomomorphismus, so daß sich $\alpha(r)$ mit $r \in \mathbb{R}$ identifizieren läßt.

c) Es gibt ein Element $i \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $i^2 = -1$.

d) Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ läßt sich in der Form $z = a + i \cdot b$ mit eindeutig bestimmten reellen Zahlen a und b darstellen (**arithmetische Darstellung von** z).

(2.17) BEM: **a)** Der Körper $\mathbb{C}$ ist **algebraisch abgeschlossen**, d.h. jedes nichtkonstante Polynom aus $\mathbb{C}[T]$ besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Dies besagt der **Fundamentalsatz der Algebra**, der 1799 zum ersten Mal von Gauß bewiesen wurde. Einen Beweis führt man am einfachsten mit funktionentheoretischen Methoden.

b) $\mathbb{C}$ läßt sich **nicht** zu einem angeordneten Körper machen, da sonst Quadrate komplexer Zahlen nichtnegativ sein müßten, insbesondere $i^2 = -1 \geq 0$. Aber $-1 < 0$!