

B) Konstruktion von $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ ist ein IB, in dem 1 und -1 die einzigen Einheiten sind (das sind die bzgl. der Multiplikation invertierbaren Elemente). Gleichungen der Form

$$a + x = b$$

haben für beliebige $a, b \in \mathbb{Z}$ immer eine Lösung in $\mathbb{Z}$. Dagegen sind Gleichungen der Form

$$a \cdot x = b$$

mit $a, b \in \mathbb{Z}$ i.a. nicht in $\mathbb{Z}$ lösbar. Wir wollen daher $\mathbb{Z}$ in einen Körper (nämlich den Körper der rationalen Zahlen) einbetten, in dem dann diese Gleichungen für alle $a \neq 0$ Lösungen besitzen.

(2.7) LEMMA: Durch die Vorschrift

$$(a, b)\rho(c, d) \iff ad = bc \quad (a, c \in \mathbb{Z}; b, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

wird eine Äquivalenzrelation ρ auf dem kartesischen Produkt $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definiert.

(2.8) DEF: Die Quotientenmenge

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) / \rho$$

heißt **Menge der rationalen Zahlen**. Eine Äquivalenzklasse

$$[(a, b)]_\rho =: \frac{a}{b} \quad ((a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))$$

heißt **rationale Zahl**.

Achtung: $\frac{a}{b}$ bezeichnet die Äquivalenzklasse von (a, b) und **nicht** das Ergebnis irgendeiner Rechenoperation!

(2.9) SATZ: a) Seien $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$. Durch die Vorschriften

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}$$

werden eine Addition und eine Multiplikation auf $\mathbb{Q}$ definiert, so daß $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ zu einem Körper wird.

b) Seien $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ mit $b, d \in \mathbb{N}$. Dann wird durch die Vorschrift

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \iff ad \leq bc$$

eine lineare Ordnungsrelation auf $\mathbb{Q}$ definiert, so daß $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ zu einem angeordneten Körper wird.

BEM: Achte auf die Wohldefiniertheit der Rechenoperationen und der Relation!

(2.10) DEF: Ein Körper $(K, +, \cdot)$ heißt **angeordneter Körper**, wenn es auf K eine lineare Ordnungsrelation $\leq$ gibt, die mit den beiden Rechenoperationen verträglich ist, d.h.

- a) $x \leq y \implies x + z \leq y + z \quad (\forall x, y, z \in K)$
 b) $x \leq y \implies x \cdot z \leq y \cdot z \quad (\forall x, y, z \in K \text{ mit } z \geq 0).$

(2.11) LEMMA: Die Abbildung $\alpha : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definiert durch $\alpha(a) := \frac{a}{1}$ für $a \in \mathbb{Z}$ ist ein injektiver Ringhomomorphismus, und es gilt

$$\mathbb{Q} = \{ \alpha(a) \cdot \alpha(b)^{-1} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \}.$$

BEM: Nimmt man die Identifizierung $\alpha(a) = a$ für $a \in \mathbb{Z}$ vor, so können wir $\mathbb{Z}$ als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ und insbesondere auch als Unterring von $\mathbb{Q}$ auffassen.

Wir wollen jetzt allgemeiner die obige Konstruktion für einen beliebigen IB vornehmen.

(2.12) SATZ: R sei ein IB. Dann gilt:

- a) Es gibt einen Körper K und einen injektiven Ringhomomorphismus $\alpha : R \longrightarrow K$, so daß gilt

$$K := \{ \alpha(a)\alpha(b)^{-1} \mid a, b \in R, b \neq 0 \}$$

- b) K ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

K heißt **Quotientenkörper von R** und wird mit $Q(R)$ bezeichnet.

(2.13) BEISPIELE: a) $Q(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$

- b) Ist K ein Körper, so ist der Polynomring $K[T]$ in einer Unbestimmten über K insbesondere ein IB und läßt sich infolgedessen in seinen Quotientenkörper einbetten.

$$Q(K[T]) = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in K[T], g \neq 0 \right\} =: K(T)$$

heißt **Körper der rationalen Funktionen in der Unbestimmten T über K** . Dabei bezeichnet $\frac{f}{g}$ die Äquivalenzklasse $[(f, g)]$.