

§ 2. Zahlbereichserweiterungen

A) Konstruktion von $\mathbb{Z}$ aus $\mathbb{N}$

Wir setzen die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ der natürlichen Zahlen als gegeben voraus. Die Grundeigenschaften von $\mathbb{N}$ werden durch die PEANO-Axiome beschrieben. Damit lassen sich dann eine Addition, Multiplikation und Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ definieren mit folgenden Eigenschaften:

- die Addition $+$ ist eine assoziative und kommutative Verknüpfung auf $\mathbb{N}$, d.h. $(\mathbb{N}, +)$ ist eine kommutative **Halbgruppe**. Es gilt die folgende **Kürzungsregel**
 $\forall k, m, n \in \mathbb{N} : k + m = k + n \implies m = n$
- die Multiplikation $\cdot$ ist eine assoziative und kommutative Verknüpfung auf $\mathbb{N}$, die 1 als neutrales Element besitzt, d.h. $(\mathbb{N}, \cdot)$ ist eine kommutative Halbgruppe mit neutralem Element. Es gilt die folgende Kürzungsregel
 $\forall k, m, n \in \mathbb{N} : k \cdot m = k \cdot n \implies m = n$
- Die Ordnungsrelation $\leq$ auf $\mathbb{N}$ ist linear und mit $+$ und $\cdot$ **verträglich**, d.h. es gilt
 $\forall k, m, n \in \mathbb{N} : m \leq n \implies k + m \leq k + n$
 $\forall k, m, n \in \mathbb{N} : m \leq n \implies k \cdot m \leq k \cdot n$

(2.1) LEMMA: Auf der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sei die Relation ρ definiert durch

$$(m, n)\rho(m', n') \iff m + n' = n + m' \quad (m, m', n, n' \in \mathbb{N})$$

Dann ist ρ eine Kongruenzrelation auf der kommutativen Halbgruppe $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, +)$.

(2.2) SATZ: Auf der Quotientenmenge $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \rho$ sei eine Addition $+$ definiert durch die Vorschrift

$$[(m, n)]_\rho + [(m', n')]_\rho := [(m + m', n + n')]_\rho \quad (m, m', n, n' \in \mathbb{N})$$

Dann gilt:

- $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abelsche Gruppe. Dabei ist $[(1, 1)]_\rho$ das neutrale Element und $[(n, m)]_\rho$ das zu $[(m, n)]_\rho$ negative Element.
- Die Abbildung $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, m \longmapsto [(m + m, m)]_\rho$ ist ein injektiver Halbgruppenhomomorphismus, und es gilt

$$\mathbb{Z} = \{ \alpha(m) - \alpha(n) \mid m, n \in \mathbb{N} \}.$$

(2.3) BEM: a) Identifiziert man $\alpha(m)$ mit $m \in \mathbb{N}$, so erhält man

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \mathbb{Z} = \{m - n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$$

Setzt man noch $-\alpha(m) =: -m$ und $[(1, 1)]_\rho =: 0$ so ergibt sich die gewohnte Darstellung

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

b) $\mathbb{Z}$ ist durch die Eigenschaften in (2.2) bis auf Isomorphie **eindeutig** bestimmt.

c) Die oben beschriebene Konstruktion von $\mathbb{Z}$ läßt sich folgendermaßen verallgemeinern:

(2.4) SATZ: $(H, +)$ sei eine kommutative Halbgruppe mit Kürzungsregel. Dann gilt:

a) Es gibt eine Gruppe $(G, +)$ und einen injektiven Halbgruppenhomomorphismus $\alpha : H \longrightarrow G$ mit

$$G := \{ \alpha(a) - \alpha(b) \mid a, b \in H \}$$

b) $(G, +)$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Wir wollen jetzt noch auf $\mathbb{Z}$ eine Multiplikation definieren, so daß $\mathbb{Z}$ zu einem Ring wird.

(2.5) SATZ: Durch die Vorschrift

$$[(m, n)]_\rho \cdot [(m', n')]_\rho := [(m \cdot m' + n \cdot n', m \cdot n' + n \cdot m')]_\rho \quad (m, m', n, n' \in \mathbb{N})$$

wird eine Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ definiert, so daß $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$ wird.

(2.6) BEM: a) Durch

$$[(m, n)]_\rho \leq [(m', n')]_\rho := m + n' \leq n + m' \quad (m, m', n, n' \in \mathbb{N})$$

wird eine lineare Ordnungsrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert, die mit $+$ und $\cdot$ verträglich ist, d.h.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : a \leq b \implies a + c \leq b + c$$

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \forall c \in \mathbb{Z} \underline{c \geq 0} : a \leq b \implies a \cdot c \leq b \cdot c.$$

b) $\mathbb{Z}$ ist außerdem ein **Integritätsbereich (IB)**, d.h. $\mathbb{Z}$ ist **nullteilerfrei**:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : a \cdot b = 0 \implies a = 0 \vee b = 0.$$