Beispiele: 6) Für $g \in G$ ist $[\,g\,] = \{\, h \mid h \in G \wedge h \parallel g \,\}$. Damit ist $[\,g\,]$ die Menge aller zu g parallelen Geraden. Das Kennzeichnende für $[\,g\,]$ ist also die gemeinsame **Richtung**, die alle Geraden aus $[\,g\,]$ haben.

7) Für die Äquivalenzrelation $=$ auf einer Menge M gilt: $[\,x\,]_= := \{\, y \mid y \in M \wedge y = x \,\} = \{x\}$. Also $M/_= \;=\; \{\, \{\,x\,\} \mid x \in M \,\}$

12) Für die Kongruenzrelation modulo 2 auf $\mathbb{Z}$ gilt:
$[\,0\,] \;=\; \{\, x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x\,K_2\,0 \,\} = G$ (Menge der geraden ganzen Zahlen)
$[\,1\,] \;=\; \{\, x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x\,K_2\,1 \,\} = U$ (Menge der ungeraden ganzen Zahlen)
Ferner gilt $[\,2\,] = [\,8\,] = [\,-6\,]$, $[\,-1\,] = [\,3\,] = [\,-17\,]$, $\mathbb{Z}/K_2 = \{\,[\,0\,], [\,1\,]\}$

Für die Kongruenzrelation modulo 3 auf $\mathbb{Z}$ gilt:
$[\,0\,] = \{\, x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x\,K_3\,0 \,\} \;=\; V_0$ $\qquad [\,1\,] = \{\, x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x\,K_3\,1 \,\} \;=\; V_1$
$[\,2\,] = \{\, x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x\,K_3\,2 \,\} \;=\; V_2$
Es gilt z.B. $[\,0\,] = [\,6\,] = [\,-9\,]$ oder $[\,1\,] = [\,-5\,] = [\,16\,]$, und es ist $\mathbb{Z}/K_3 = \{\,[\,0\,], [\,1\,], [\,2\,]\,\}$.
Man sieht: Viele der Äquivalenzklassen fallen zusammen, so daß schließlich die Quotientenmenge $\mathbb{Z}/K_3 = \{\,[\,x\,] \mid x \in \mathbb{Z}\,\}$ aus genau drei Klassen besteht.
Allgemein können wir beweisen:

(1.7) SATZ: *M sei eine Menge und ρ eine Äquivalenzrelation auf M . Dann gilt:*

a) $\forall\, x \in M \;:\; x \in [\,x\,]_\rho$

b) $\forall\, x, y \in M \;:\; [\,x\,]_\rho = [\,y\,]_\rho \iff x\,\rho\,y$

c) $\forall\, x, y \in M \;:\; [\,x\,]_\rho = [\,y\,]_\rho \iff [\,x\,]_\rho \cap [\,y\,]_\rho \neq \emptyset$

d) $\displaystyle\bigcup_{[\,x\,]_\rho \in M/\rho} [\,x\,]_\rho \;=\; M$.

Bew: a) Wegen $\ddot{\mathbf{A}}_1$) gilt $x\,\rho\,x$, also $x \in [\,x\,]$.

b) "$\Longrightarrow$" $x \in [\,x\,] = [\,y\,] \implies x \in [\,y\,] \implies x\,\rho\,y$ nach Definition von $[\,y\,]$.

"$\Longleftarrow$" Sei $z \in [\,x\,]$ beliebig. Dann gilt $z\,\rho\,x$. Aus der Voraussetzung $x\,\rho\,y$ ergibt sich mit der Transitivität $z\,\rho\,y$, also $z \in [\,y\,]$. Damit ist $[\,x\,] \subseteq [\,y\,]$ gezeigt. Analog zeigt man $[\,y\,] \subseteq [\,x\,]$, so daß insgesamt die behauptete Gleichheit folgt.

c) "$\Longrightarrow$" $[\,x\,] = [\,y\,] \neq \emptyset$ (nach a)) $\implies [\,x\,] \cap [\,y\,] = [\,x\,] \neq \emptyset$.

"$\Longleftarrow$" $\exists\, z \in [\,x\,] \cap [\,y\,] \implies z\,\rho\,x \wedge z\,\rho\,y$. $\ddot{\mathbf{A}}_3$) und $\ddot{\mathbf{A}}_2$) liefern hieraus $x\,\rho\,y \implies [\,x\,] = [\,y\,]$

d) $[\,x\,] \subseteq M \implies \displaystyle\bigcup_{[\,x\,] \in M/\rho} [\,x\,] \subseteq M$.

Umgekehrt: $y \in M$ beliebig $\Longrightarrow y \in [\,y\,] \implies y \in \displaystyle\bigcup_{[\,x\,] \in M/\rho} [\,x\,]$, d.h. $M \subseteq \displaystyle\bigcup_{[\,x\,] \in M/\rho} [\,x\,]$. •

Die Äquivalenzklassen bzgl. einer Äquivalenzrelation ρ auf einer Menge M bilden ein disjunktes Mengensystem bestehend aus nichtleeren Teilmengen von M, deren Vereinigung die Menge M ergibt.

(1.8) DEF: Es sei M eine Menge. Ein System $\mathcal{Z}$ von Teilmengen von M heißt eine **Zerlegung von** M , wenn gilt:

1) $\forall\, Z \in \mathcal{Z} \,:\, Z \subseteq M$ und $Z \neq \emptyset$

2) $\forall\, Z, Z' \in \mathcal{Z} \,:\, Z \neq Z' \implies Z \cap Z' = \emptyset$

3) $\bigcup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} Z = M$.

Damit ist die Quotientenmenge eine Zerlegung von M. Umgekehrt bestimmt jede Zerlegung von M eine Äquivalenzrelation auf M , deren Quotientenmenge gerade die gegebene Zerlegung ist.

(1.9) SATZ: Es sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung der Menge M. Dann wird durch

$$x\,\rho\,y \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, Z \in \mathcal{Z} \,:\, x \in Z \wedge y \in Z \quad (x, y \in M)$$

eine Äquivalenzrelation ρ auf M definiert mit

$$[x]_\rho = Z \text{ , falls } x \in Z \quad (x \in M)\,.$$

Bew: Übungsaufgabe

Kongruenzrelationen

(1.10) DEF: $(M, \cdot)$ sei eine Menge mit einer Verknüpfung, und ρ sei eine Äquivalenzrelation auf M. ρ heißt **verträglich mit** $\cdot$, wenn gilt:

$$\forall\, x, x', y, y' \in M \,:\, x\rho y \wedge x'\rho y' \implies (x \cdot x')\rho(y \cdot y')$$

Man nennt ρ dann auch eine **Kongruenzrelation** auf $(M, \cdot)$.

(1.11) SATZ: $(M, \cdot)$ sei eine Menge mit einer Verknüpfung, und ρ sei eine Kongruenzrelation auf $(M, \cdot)$. Dann wird durch die Vorschrift

$$[x]_\rho \odot [y]_\rho := [x \cdot y]_\rho \quad (x, y \in M)$$

eine Verknüpfung $\odot$ auf der Quotientenmenge M/ρ definiert. Weiter gilt:

a) $\cdot$ assoziativ $\implies$ $\odot$ assoziativ

b) $\cdot$ kommutativ $\implies$ $\odot$ kommutativ

c) Ist $1 \in M$ neutral bzgl $\cdot$, so ist $[1]_\rho \in M/\rho$ neutral bzgl. $\odot$

d) Besitzt $(M, \cdot)$ ein neutrales Element 1 und ist $x \in M$ invertierbar bzgl. $\cdot$, so ist $[x]_\rho$ invertierbar bzgl. $\odot$.

(1.12) KOROLLAR: ρ sei eine Kongruenzrelation auf einer Gruppe $(G, \cdot)$. Dann gilt:

a) $(G/\rho, \odot)$ ist eine Gruppe

b) Die natürliche Abbildung $\nu : (G, \cdot) \longrightarrow (G/\rho, \odot)$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\text{Kern}(\nu) = [1]_\rho$.

(1.13) SATZ: $(G, \cdot)$ sei eine Gruppe und $U \leq G$ eine Untergruppe. Dann gilt:

a) Durch die Vorschrift $\qquad a\,\lambda_U\,b \;\; :\Longleftrightarrow \;\; a^{-1}b \in U \quad (a, b \in G)$

wird auf G eine Äquivalenzrelation definiert, wobei gilt:

$[a]_{\lambda_U} \;=\; aU$ (Linksnebenklasse von a nach U) .

b) Durch die Vorschrift $\qquad a\,\rho_U\,b \;\; :\Longleftrightarrow \;\; ab^{-1} \in U \quad (a, b \in G)$

wird auf G eine Äquivalenzrelation definiert, wobei gilt:

$[a]_{\rho_U} \;=\; Ua$ (Rechtsnebenklasse von a nach U) .

c) λ_U ist genau dann mit $\cdot$ verträglich, wenn U Normalteiler in G ist. In diesem Falle gilt dann:

i) $\lambda_U = \rho_U$ $\qquad$ **ii)** $U = [1]_{\lambda_U}$.

(1.14) BEM: Sei N ein Normalteiler der Gruppe $(G, \cdot)$. Dann gilt:

a) Die Äquivalenzrelation $\lambda_N = \rho_N$ ist mit $\cdot$ verträglich (1.13c) .

b) $G/\lambda_N = G/\rho_N = \{[a]_{\lambda_n} \,|\, a \in G\}$ ist eine Gruppe, die sog. **Faktorgruppe von G nach N** (1.12a) . Diese wird kurz mit G/N bezeichnet.

c) Die natürliche Abbildung $\nu : G \longrightarrow G/N$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\text{Kern}(\nu) = [1]_{\lambda_N} = N$ (1.12b),(1.13c) .